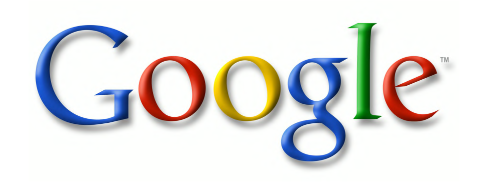
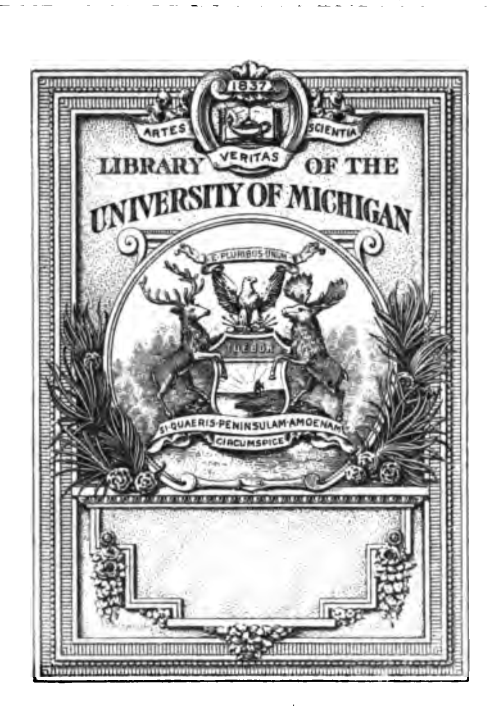



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET
Recteur
de l'Académie de Clermont.

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne.

Lucien LÉVY
Agrégé des sciences mathématiques,
Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

2e SÉRIE
TOME CINQUIÈME
Année 1886.



PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1886

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

LE THÉORÈME DE FEUERBACH

Par M. **Lignières**, professeur au Lycée Louis-le-Grand.

1\. — *Le cercle des neuf points* (*), *dans un triangle, est tangent au cercle inscrit et aux cercles ex-inscrits.*

Je me propose de démontrer ce théorème par des considérations de géométrie très élémentaire.

Soient a, b, c les côtés du triangle et $2p$ son périmètre; R le rayon du cercle circonscrit et G son centre; r le rayon du cercle inscrit et O son centre; r' le rayon du cercle ex-inscrit dans l'angle A, et O' son centre; ρ le rayon du cercle des neuf points et G' son centre; P l'orthocentre (**), N le milieu de PA et h la hauteur AF. Soient D le milieu de a, F le pied de la hauteur h, E le point de contact du cercle inscrit et M le milieu de DF.

On a, d'après des relations connues,

$$DE = (p - c) - \frac{a}{2} = \frac{b - c}{2}, \qquad DF = \frac{b^2 - c^2}{2a};$$

donc

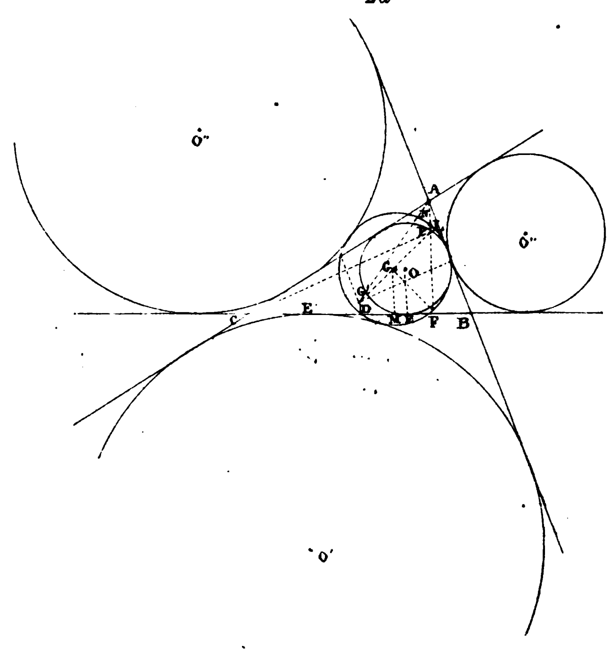
(*) Le *Cercle d'Euler*, comme le capitaine Brocard a proposé de le dénommer (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1884, p. 201). Le théorème en question date de 1822. Voir une note de M. Brocard (*loc. cit*). G. L.

(**) Cette expression commode, qui est aujourd'hui généralement adoptée, est due à James Booth, *Mathesis*, t. I, p. 154; voyez aussi : Annuaire de l'Association Française, Congrès de Rouen, p. 190. G. L.

$$EF = DF - DE = \frac{(b-c)(b+c-a)}{2a} = \frac{(b-c)(p-a)}{a},$$

et

$$DE \times EF = \frac{(b-c)^2(p-a)}{2a}.$$



Le quadrilatère inscriptible BLPF donne

$$AP \times AF = c \times AL;$$

et, comme

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times AL,$$

on a donc

$$2AP \times AF = b^2 + c^2 - a^2;$$

d'où

$$NP = \frac{l^2 + c^2 - a^2}{4h},$$

$$NF = AF - NP = h - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4h} = \frac{4a^2h^2 - a^2(b^2 + c^2 - a^2)}{4ha^2}.$$

Mais

$$2pr = ah, \quad 4Rpr = abc, \quad 4\imath^2h^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2,$$

donc

$$R \times r - NF \times r = \frac{abc}{4p} - \frac{4a^2h^2 - a^2(b^2 + c^2 - a^2)}{8ap}$$

$$= \frac{2a^2bc - 4a^2b^2 + (a^2 + b^2 - c^2)^2 + a^2(b^2 + c^2 - a^2)}{8ap}$$

$$= \frac{(b-c)^2[(b+c)^2 - a^2]}{8ap} = \frac{(b-c)^2(p-a)}{2a}.$$

Par conséquent

$$DE \times EF = rR - r \times NF = r(R - NF).$$

Cela établi, on a

$$\overline{OG'}^2 = \left(r - \frac{1}{2}NF\right)^2 + \left(\frac{1}{2}DF - DE\right)^2$$

$$= r^2 + (\overline{G'M}^2 + \overline{MF}^2) + \overline{DE}^2 - r \times NF - DE \times DF$$

$$= r^2 + \rho^2 - r \times NF - DE \times EF = r^2 + \rho^2 - rR = (\rho - r)^2;$$

puisque $\rho = \frac{R}{2}$.

Ce qui prouve que le cercle inscrit est tangent intérieurement au cercle des neuf points.

E′ étant le point de contact du cercle ex-inscrit dans l'angle A, on a DE′ = DE et

$$\overline{O'G'}^2 = \left(r' + \frac{1}{2}NF\right)^2 + \left(\frac{1}{2}DF + DE\right)^2$$

$$= r'^2 + \rho^2 + \overline{DE}^2 + r' \times NF + DE \times DF$$

$$= r'^2 + \rho^2 + r' \times NF + DE \times E'F$$

$$= r'^2 + \rho^2 + Rr' = \left(\frac{R}{2} + r'\right)^2,$$

ce qui prouve que le cercle ex-inscrit et le cercle de neuf points sont tangents extérieurement.

2. — J'ajoute quelques formules obtenues directement par des considérations de triangles rectangles et qui peuvent être utiles. Elles donnent, en fonction du rayon du cercle circonscrit, du rayon de cercle inscrit et des rayons des cercles ex-inscrits, les distances des centres, pris deux à deux, de ces cercles.

$$\overline{GO}^2 = R(R - 2r) \text{ (*)}$$
$$\overline{GO'}^2 = R(R + 2r')$$
$$\overline{GO''}^2 = R(R + 2r'')$$
$$\overline{GO'''}^2 = R(R + 2r''')$$
$$\overline{OO'}^2 = 4R(r' - r)$$
$$\overline{OO''}^2 = 4R(r'' - r)$$
$$\overline{OO'''}^2 = 4R(r''' - r)$$
$$\overline{O''O'''}^2 = 4R(r'' + r''')$$
$$\overline{O'''O'}^2 = 4R(r''' + r')$$
$$\overline{O'O''}^2 = 4R(r' + r''),$$

THÉORÈME D'ARITHMETIQUE

SUR UN PRODUIT DE DEUX FACTEURS

Un produit de deux facteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre de ces facteurs. (Démonstration de Legendre.)

Considérons le produit $a \times b$, et soit $a > b$. Si le théorème est vrai pour tous les nombres moindres que a, je dis qu'il l'est encore quand l'un des facteurs est a. Soit en effet $a = b + c$. On a

$$a \times b = (b + c) \times b = b \times b + c \times b$$

et

$$b \times a = b(b + c) = b \times b + b \times c.$$

On aura donc $a \times b = b \times a$, si l'on a $c \times b = b \times c$. Or cela est supposé, car on a $a > b$ et $a > c$. Or le théorème est vrai pour le produit 1×1. Il est donc général, et se démontre de proche en proche.

(*Communiqué par* J.-B. Pomey.)

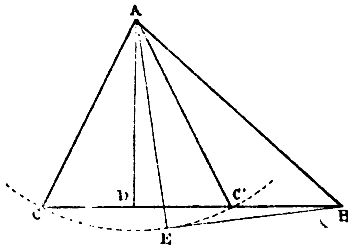
(*) Catalan, *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*, p. 90.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME
DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Par M. **Mosnat**, professeur au Lycée de Toulon.

Théorème. — *Dans un triangle quelconque, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins le double produit de l'un de ces côtés par la projection de l'autre sur celui-ci, si l'angle opposé est aigu ; ou plus ce double produit, si l'angle opposé est obtus.*

Décrivons du sommet A comme centre un arc passant par C et coupant le côté BC en C'. Si D est le milieu de CC', le segment C sera la projection du côté AC sur BC et le segment C'D sera la projection du côté AC' sur BC'. Menons du point B la tangente BE à cet arc. Le triangle rectangle ABE nous donnera



$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2,$$

et comme on a

$$AE = AC,$$

et

$$\overline{BE}^2 = BC \times BC' = BC\,(BC - 2CD) = \overline{BC}^2 - 2BC \times CD,$$

on en conclut

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD.$$

Telle est la valeur du carré du côté AB, opposé à un angle aigu C.

Supposons maintenant que AB soit opposé à l'angle obtus C' du triangle ABC'. On aura

$$AE = AC',$$

et

$$\overline{BE}^2 = BC \times BC' = BC'\,(BC' + 2C'D) = \overline{BC'}^2 + 2BC' \times C'D,$$

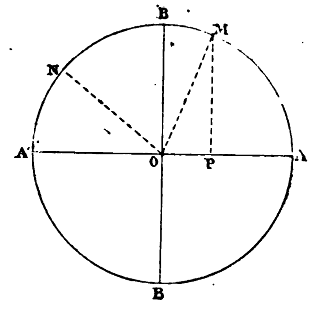
d'où

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC'}^2 + \overline{BC'}^2 + 2BC' \times CD,$$

NOUVELLE DÉMONSTRATION
DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA TRIGONOMÉTRIE PLANE

Par M. **B. Niewenglowski.**

Soit OA le cercle trigonométrique; prenons $AM = a$, $AN = b$. Soit P la projection de M sur A'A; projetons sur la direction ON le chemin OPM et sa résultante OM : nous aurons



$$Pj OM = Pj OP + Pj PM.$$

Or,

$$Pj OM = \cos (ON, OM) = \cos (a - b)$$

$$Pj OP = \cos a \cos (ON, OA) = \cos a \cos b$$

$$Pj PM = \sin a \cos (ON, OB) = \sin a \cos \left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin a \sin b;$$

donc $\cos (a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Si l'on change b en $-b$,

$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE
ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir année 1885, p. 268.)

CHAPITRE VIII
LE RAYON DE COURBURE DANS LES CONIQUES

Nous ne pouvons quitter le tracé des coniques par points et par tangentes sans faire connaître une construction permettant de déterminer, avec la règle et l'équerre, le centre du cercle osculateur en un point pris sur la courbe.

Nous examinerons d'abord le cas de la parabole.

84. Le rayon et le centre de courbure dans la parabole. — Soient M, M′ deux points infiniment voisins sur la parabole; les normales en ces points se coupent en C et nous ferons d'abord observer que l'angle MfM' est le double de l'angle MCM'.

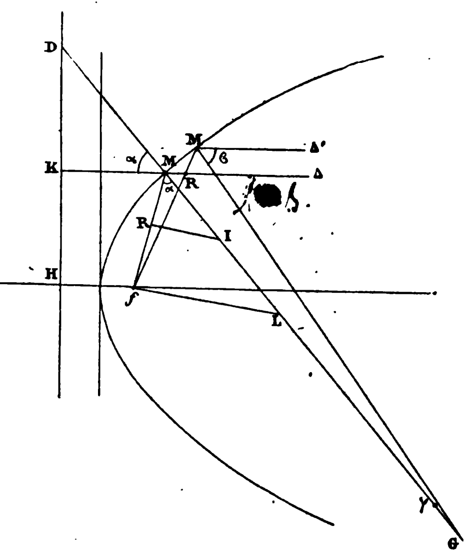


Fig. 56.

En effet, la normale étant bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur et la parallèle à la direction positive de l'axe, on voit qu'en posant,

$$fM\Delta = 2\alpha, \qquad fM'\Delta' = 2\beta,$$

on a

$$MCM' = \beta - \alpha, \qquad \text{et} \qquad MfM' = fR\Delta - fM\Delta = 2(\beta - \alpha).$$

Cette remarque étant faite, considérons les cercles $MM'f$, $MM'C$; en désignant par u et v leurs rayons, nous avons

$$\frac{MM'}{\sin f} = 2u, \qquad \text{et} \qquad \frac{MM'}{\sin C} = 2v\ ;$$

ou

$$\frac{MM'}{f} \cdot \frac{f}{\sin f} = 2u, \qquad \text{et} \qquad \frac{MM'}{C} \cdot \frac{C}{\sin C} = 2v\ ;$$

ou encore, puisque $f = 2C$

$$\frac{f}{\sin f} \cdot \frac{\sin C}{C} \cdot \frac{1}{2} = \frac{u}{v}.$$

Passons à la limite et supposons que le point M′ se rapproche de M et vienne se confondre avec lui; la limite de $\frac{MM'}{C}$ est égale au rayon de courbure R; écrivons donc $\lim 2v = R$. Désignons par ρ la limite de u ; ρ est le rayon d'un cercle

passant par f, et par M tangentiellement à la parabole. Nous avons donc, finalement,

$$R = 4\rho.$$

D'après cela, si nous élevons au milieu H de Mf une perpendiculaire jusqu'à sa rencontre en I avec la normale en M, le point γ centre de courbure au point M s'obtient en prenant $M\gamma = 4MI$. Il est facile de reconnaître que cette construction revient à celle que nous avon sdéjà indiquée. *(Géom. an., loc. cit.)*

Nous allons encore appliquer cette méthode à l'ellipse ; elle nous conduira à une construction très simple du centre de courbure correspondant à un point de la courbe.

85. Centre de courbure dans l'ellipse. — Soient f, f' les foyers de la courbe; M, M′ désignant deux points de l'ellipse, on trace les normales en ces points; soit C leur point de rencontre.

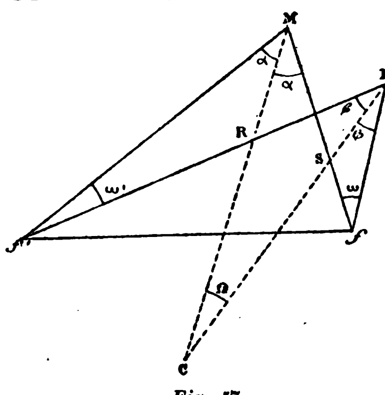


Fig. 57.

Les triangles MRf', M′RC donnent

$$\alpha + \omega' = \beta + \Omega;$$

d'autre part, les triangles MSC, $M'Sf$ prouvent que

$$\beta + \omega = \alpha + \Omega.$$

Ajoutant ces égalités, il vient

$$\omega + \omega' = 2\Omega. \qquad (1)$$

Cela posé, désignons par ρ et ρ' les rayons des cercles circonscrits aux triangles $MM'f$, $MM'f'$; nous avons

$$\frac{MM'}{\sin \omega} = 2\rho, \quad \text{et} \quad \frac{MM'}{\sin \omega'} = 2\rho'.$$

D'autre part, le rayon de courbure R correspondant au point M est donné par la formule

$$R = \lim \frac{MM'}{\Omega} = \lim \frac{MM'}{\sin \Omega} . \lim \frac{\sin \Omega}{\Omega}$$

ou

$$R = \lim \frac{MM'}{\sin \Omega}.$$

L'égalité (1) donne aussi

$$\sin \omega \cos \omega' + \sin \omega' \cos \omega = 2 \sin \Omega \cos \Omega$$

et par suite

$$\frac{\cos \omega'}{2\rho} + \frac{\cos \omega}{2\rho'} = \frac{2 \cos \Omega}{r},$$

r représentant le rayon du cercle circonscrit au triangle MM'C. En passant à la limite, c'est-à-dire en supposant que M' vienne se confondre avec M, nous avons

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{2}{R}.$$

Dans cette formule d et d' désignent les diamètres des cercles qui passent par M' tangentiellement à l'ellipse et, respectivement, par les foyers de la courbe.

De cette égalité résulte une construction assez simple pour le centre de courbure.

Soit MN la normale à l'ellipse; cette normale est rencontrée aux points G, G' par les perpendiculaires élevées aux points f et f' aux rayons vecteurs Mf, Mf'; si l'on prend le point γ conjugué harmonique de M par rapport aux points G, G'; γ est le centre de courbure qui correspond au point M.

Toutes ces constructions n'exigent, comme on le voit, que l'usage de la règle et de l'équerre.

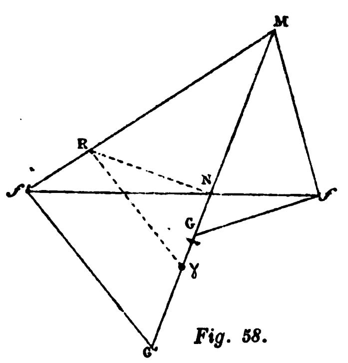


Fig. 58.

86. Remarque. — Je reviens à la construction donnée tout à l'heure pour déterminer le centre de courbure qui correspond à un point de la parabole pour faire observer que l'on peut encore fixer la position de ce point, et même d'une façon un peu plus rapide, en introduisant dans la figure la directrice de la courbe.

Reportons-nous à la figure 1; soit HD la directrice de la para-

bole. Élevons en f une perpendiculaire à Mf et soit L le point où cette perpendiculaire rencontre la normale MC. Les deux triangles rectangles MDK, MfL ont un angle égal $fML = KMD$, d'après la propriété fondamentale de la tangente; de plus, $MK = Mf$. Ces deux triangles sont égaux et l'on a

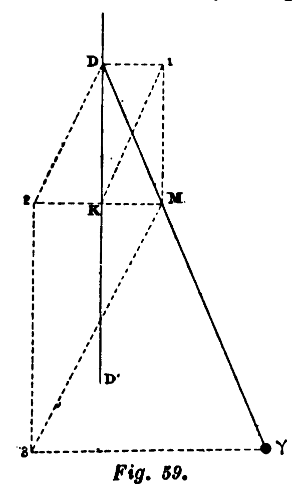


Fig. 59.

$$MD = ML.$$

D'ailleurs, nous avons vu que γ désignant le centre de courbure, nous avions

$$M\gamma = 4MI = 2ML.$$

Finalement, nous pouvons donc dire que

$$M\gamma = 2MD.$$

De cette remarque résulte, pour la construction du point γ, avec la règle et l'équerre, l'épreuve du tracé qui est représenté par la figure ci-jointe. Dans cette figure on suppose que l'on donne la normale MD, le pied M de cette normale, et la directrice DD'. On détermine successivement, et dans l'ordre indiqué, les points 1, 2 et 3. De ce dernier, on déduit le centre de courbure γ en abaissant une perpendiculaire sur la directrice, jusqu'à sa rencontre avec la normale. *(A suivre.)*

CLAUDE MYDORGE (1585-1647)

NOTICE SUR UN DE SES MANUSCRITS
CONSTRUCTIONS DE GÉOMÉTRIE PRATIQUE DUES A CE MATHÉMATICIEN (*)

Par M. Edmond **Bordage**, professeur au Collège de Nantua.

Claude Mydorge (1585-1647), le savant ami de Descartes, fut le premier mathématicien français qui écrivit un traité sur les *Sections coniques*. Son ouvrage devait se composer de

(*) On lira avec intérêt à ce sujet le récent ouvrage de M. Charles Henry, *Notice sur un manuscrit inédit* de Claude Mydorge, et la notice bibliogra-

huit parties. En 1631, il publia les deux premiers livres; en 1641, il fit paraître deux autres livres. Le manuscrit des quatre autres livres a disparu. Le second livre peut être considéré comme le plus important; on y voit la description de l'ellipse au moyen du cercle dont on allonge toutes les ordonnées dans un rapport constant. On y trouve aussi la proposition suivante : *Si d'un point pris dans le plan d'une conique, on mène des rayons aux points de la courbe et qu'on les prolonge dans un rapport donné, leurs extrémités seront sur une nouvelle conique semblable à la première.* Ces deux notions peuvent être considérées comme le point de départ de cette belle méthode de transformation homographique rendue si célèbre par les travaux de M. Chasles. On doit encore à Claude Mydorge un *Examen des récréations mathématiques du Père Leurechon* (1630) et des réfutations d'une quadrature du cercle et d'une duplication du cube.

Dans un curieux manuscrit de Mydorge, retrouvé à la Bibliothèque nationale par M. Charles Henry, sont réunis 1,002 problèmes de géométrie pratique. Les solutions de ces problèmes ont été comparées à celles des mêmes questions prises dans le *Traité des constructions géométriques* d'Aboul-Wéfa (xe siècle après J.-C.) et dans la *Règle du cordeau* pour la construction des autels brâhmaniques par Baudhâyana (ive siècle avant J.-C.). On comprend aisément l'utilité de ces comparaisons. Elles sont fort instructives et elles permettent de se rendre compte de la persistance des procédés et aussi de l'évolution des idées mathématiques. Du reste, beaucoup de ces constructions antiques sont fort curieuses et bien dignes d'être remarquées.

Il existe une grande analogie dans les constructions employées par Mydorge et Aboul-Wéfa pour « faire tomber une perpendiculaire à l'extrémité d'une droite ». Je donnerai ici deux de ces constructions attribuées à Aboul-Wéfa. Comme on le verra, elles possèdent l'avantage de n'empiéter par aucun trait de construction sur l'espace où l'on ne peut

---

phique publiée par la *Revue de l'enseignement secondaire et de l'enseignement supérieur*. (N° du 1er décembre 1884.)

prolonger la droite. Voici la première de ces constructions:

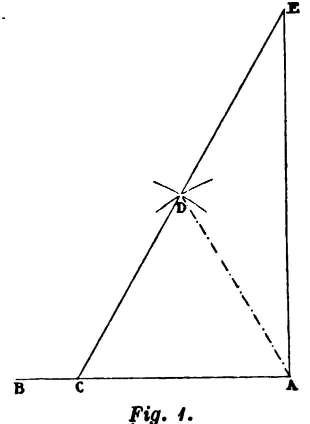


Fig. 1.

Soit la droite AB que l'on ne peut prolonger du côté A *(fig. 1)*. Prenons sur AB un point quelconque C, puis avec une ouverture de compas égale à AC décrivons deux cercles de A et de C comme centres. Ils se rencontrent en D; tirons CD, prolongeons en E de façon que DE = DC; joignons E à A et l'angle EAC sera droit.

Il est bien facile de vérifier l'exactitude de cette construction si nous joignons A à D, les deux lignes CD et DA seront égales comme rayons de cercles égaux, mais la ligne AD est la médiane du triangle CAE puisque, d'après la construction faite, CD = DE = DA. Le triangle CAE est donc rectangle en A, puisque la médiane AD est la moitié du côté CE qui est par suite l'hypoténuse. On voit aussi aisément que ce triangle rectangle possède des angles aigus qui ont pour valeurs respectives E = 30°, C = 60°, puisque l'hypoténuse CE se trouve être le double du plus petit côté de l'angle droit CA.

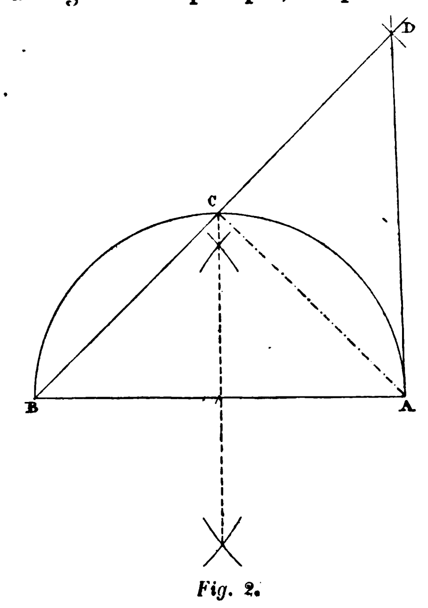


Fig. 2.

La seconde construction est la suivante : Sur AB comme diamètre, décrivons une demi circonférence *(fig. 2)*; prenons le milieu C de cette demi-circonférence, joignons BC et prolongeons AD = CB. Joignons D à A, l'angle $\widehat{DAB}$ sera droit. En

effet, le triangle BCD est rectangle isoscèle; mais, puisque BC = CD et que AC est par suite perpendiculaire sur le milieu de BC, le triangle BAD est lui-même isoscèle, et, comme l'angle B = 45°, D est aussi égal à 45° et l'angle A vaut par suite 90° (Le triangle BAD est alors rectangle isoscèle).

Claude Mydorge emploie la construction suivante pour « réduire trois carrés en un seul » : « Réduire deux des trois quarrez en un par un problesme connu et derechef réduire celuy qui les contient tous deux avec le troisième par le dict problesme. » Supposons que les trois carrés donnés soient LJGH, EDFG et ARCD *(fig. 3)*. Il joint D à L. La ligne DL est bien le côté du carré équivalent à la somme de LJGH et de EFDH, car, en effet, $\overline{DL}^2 = \overline{LG}^2 + \overline{DG}^2$. Cette première construction constitue ce que Mydorge appelle le « problesme connu ». Ensuite de D comme centre avec un rayon égal à DL, il décrit un arc de cercle qui vient couper en S le côté CB du troisième carré. Il joint les points A et S et AS est le côté du carré cherché. En effet $\overline{AS}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DS}^3 = \overline{AD}^2 + \overline{DL}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{LG}^2 + \overline{DG}^2$.

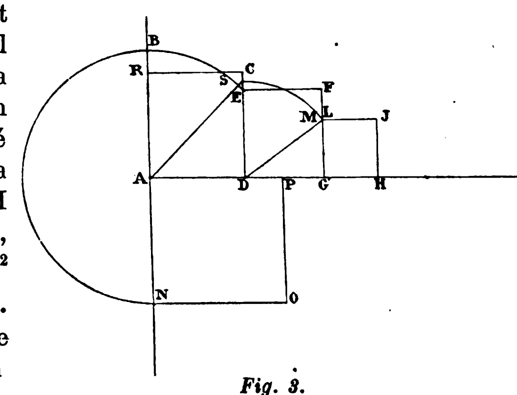


Fig. 3.

Cette longueur AS, telle que AS $= \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{LG}^2 + \overline{DG}^2}$ est donc le côté du carré égal à la somme des trois carrés donnés. — Pour achever la construction, Mydorge décrit de A comme centre, avec AS comme rayon, un arc de cercle qui vient rencontrer en N le côté AR prolongé; AU étant par suite égal à AS, il ne reste plus qu'à achever le carré APNO qui répond à la question proposée. — Cette construction est, du reste, encore employée de nos jours. — La quantité de lignes tracées est seulement moins grande *(fig. 3 bis)*.

On prend deux axes rectangulaires Bx et By. On porte, à partir de l'intersection B, deux longueurs BC et BP égales aux côtés de deux des carrés donnés et cela sur chacun des axes ; on tire PC qui est égal à $\sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{BP}^2}$. En C, on élève une perpendiculaire à PB et sur cette perpendiculaire on prend une longueur CO qui est égale au côté du troisième carré donné ; on joint P à O et cette longueur PO est le côté du carré demandé, puisque $\overline{PO}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{CO}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CO}^2$. — On arrive donc ainsi au même résultat sans être obligé de tracer une aussi grande quantité de lignes que dans le procédé dû à Claude Mydorge. — On voit aussi facilement que ces deux constructions peuvent être employées non seulement dans le cas où l'on donne trois carrés, mais encore quel que soit le nombre des carrés donnés. En général, si ce nombre est n, il faudra faire $n - 1$ fois la construction qui donne le côté d'un carré égal à la somme de deux autres. *(A suivre.)*

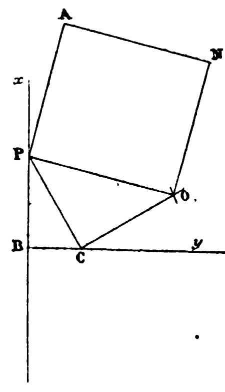


Fig. 3 bis.

QUESTIONS DIVERSES D'EXAMENS (*)

1. — *Étant donnés quatre points en ligne droite* A, B, A′, B′, *trouver le lieu des points* I *d'où les segments* AB *et* A′B′ *sont vus sous le même angle* (**).

(Saint-Cyr ; examens oraux, 1884.)

(*) Sous ce titre, nous publierons, dans chaque numéro, quelques questions posées aux examens de Saint-Cyr, de l'École navale, du Baccalauréat ès sciences... ; ou des questions qui nous paraîtront s'y rattacher.

Avec les énoncés, nous donnerons une indication sur leur solution; nous y ajouterons aussi quelques développements, quand l'occasion se présentera de le faire.

A ce propos, nous prions nos lecteurs de vouloir bien nous faire connaître les questions intéressantes qui, à leur connaissance, auraient été proposées à ces divers examens. G. L.

(**) Nous avons proposé cette question sous le n° 189. La solution que nous donnons ici ne nous empêchera pas de publier l'une de celles qu'on nous adressera.

Soit IS la bissectrice de l'angle BIA', ou de l'angle AIB', comme on voudra.

On a
$$\frac{SB}{SA'} = \frac{IB}{IA'},$$
et
$$\frac{SA}{SB'} = \frac{IA}{IB'}.$$

Ces égalités donnent
$$\frac{SA.SB}{SA'.SB'} = \frac{IA.IB}{IA'.IB'}. \quad (1)$$

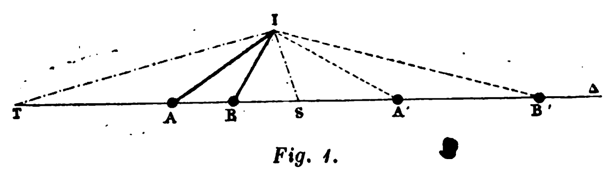


Fig. 1.

D'autre part, les deux triangles AIB, A'IB' ayant un angle égal, et les hauteurs correspondantes étant égales, on peut écrire
$$\frac{IA.IB}{IA'.IB'} = \frac{AB}{A'B'}. \quad (2)$$

La comparaison des égalités (1) et (2) donne
$$\frac{SA.SB}{SA'.SB'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Le point S est donc un point déterminé de Δ; on verrait de même qu'en élevant IT perpendiculaire à IS, le point T est fixe. Le lieu demandé est donc la circonférence décrite sur ST comme diamètre.

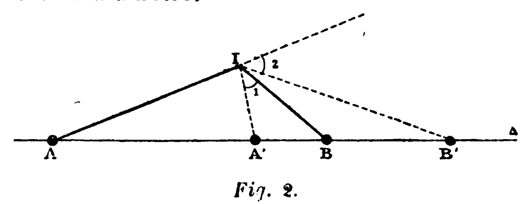


Fig. 2.

La démonstration précédente et la conclusion à laquelle elle a conduit subsistent quand, comme le représente la figure 2, les segments AB et A'B' sont vus sous des angles *supplémentaires*.

Dans cette hypothèse les angles $\widehat{1}$ et $\widehat{2}$ sont égaux et en menant la bissectrice de l'angle BIB', et, par le point I, une droite perpendiculaire à celle-ci, on obtient sur Δ deux points fixes (*).

2. — *Vérifier que l'on a*

$$\text{arc tg}\,\frac{1}{2} + \text{arc tg}\,\frac{1}{5} + \text{arc tg}\,\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Il existe beaucoup d'égalités de ce genre et nous en indiquons plus loin quelques autres qui constituent des exercices intéressants. On pourra traiter ceux-ci en suivant la marche que nous allons adopter pour résoudre la question proposée.

Posons

$$x = \text{arc tg}\,\frac{1}{2}, \qquad y = \text{arc tg}\,\frac{1}{5}, \qquad z = \text{arc tg}\,\frac{1}{8};$$

on a donc

$$\frac{1}{2} = \text{tg}\,x, \qquad \frac{1}{5} = \text{tg}\,y, \qquad \frac{1}{8} = \text{tg}\,\frac{1}{z}.$$

La formule connue

$$\text{tg}\,(x + y + z) = \frac{\text{tg}\,x + \text{tg}\,y + \text{tg}\,z - \text{tg}\,x\,\text{tg}\,y\,\text{tg}\,z}{1 - \text{tg}\,x\,\text{tg}\,y - \text{tg}\,y\,\text{tg}\,z - \text{tg}\,z\,\text{tg}\,x},$$

donne, dans le cas présent,

$$\text{tg}\,(x + y + z) = \frac{\frac{33}{40} - \frac{1}{80}}{1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{16} - \frac{1}{40}},$$

(*) Cette question, lorsqu'on la généralise, donne naissance à un lieu géométrique bien connu.

Voici cette généralisation : *On donne deux segments de droites* AB, A'B ; *trouver le lieu du point d'où l'on voit ces deux segments sous le même angle* (ou sous deux angles supplémentaires).

Steiner s'est posé cette question (*Journal für die reine und andgewandte Mathematik;* novembre 1852) et a indiqué pour le lieu l'ensemble de deux cubiques cycliques. Elle a été proposée de nouveau (*Nouvelles Annales*, 1884, p. 352) et plus récemment encore, elle a fait l'objet d'une intéressante note de M. Schoute (*Journal für....* 1885 ; p. 98).

Dans le cas particulier où les segments AB, A'B' sont placés sur une droite Δ, celle-ci fait évidemment partie du lieu. Les deux cubiques cycliques de Steiner se décomposent l'une et l'autre et donnent, comme lieu impropre la droite Δ ; puis, les deux circonférences que nous avons trouvées.

ou, tout calcul fait,

$$\operatorname{tg}(x+y+z)=1.$$

Cette égalité donne bien

$$x+y+z=\frac{\pi}{4}.$$

Pour que cette conclusion soit tout à fait rigoureuse il faut pourtant observer que la fonction

$$\operatorname{arc\,tg} X$$

doit être *bien déterminée* et, à cet effet, on doit supposer qu'elle représente le plus petit arc positif dont la tangente a une longueur donnée, égale à X.

Voici les égalités auxquelles nous avons fait allusion plus haut.

$$\frac{\pi}{2}=\operatorname{arc\,sin}\frac{3}{5}+\operatorname{arc\,sin}\frac{4}{5},$$

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3},$$

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3},$$

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}.$$

. . . .

On peut d'ailleurs trouver, en nombre indéfini, des égalités de ce genre en donnant des valeurs numériques aux paramètres a et b dans une identité telle que la suivante

$$\operatorname{arc\,cotg}\left\{\frac{2}{a}+\frac{ab(b+1)}{2}\right\}=\operatorname{arc\,tg}\frac{(b+1)a}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{ab}{2}.$$

Remarque. — On peut résoudre plus rapidement les questions de cette nature en s'appuyant sur les formules connues

$$\operatorname{arc\,tg} u+\operatorname{arc\,tg} v=\operatorname{arc\,tg}\frac{u+v}{1-uv}$$

$$\operatorname{arc\,tg} u+\operatorname{arc\,tg} v+\operatorname{arc\,tg} w=\operatorname{arc\,tg}\frac{u+v+w-uvw}{1-uv-uw-vw}$$

$$\operatorname{arc\,sin} u+\operatorname{arc\,sin} v=\operatorname{arc\,sin}\left\{v\sqrt{1-u^2}+u\sqrt{1-v^2}\right\},$$

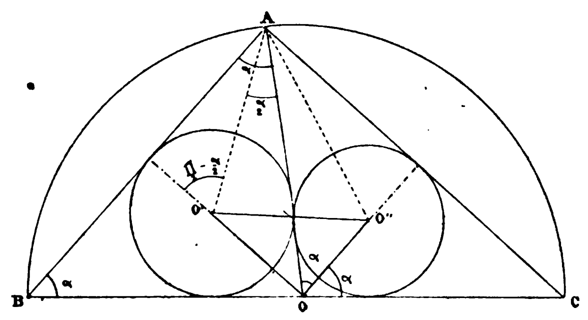
etc....

(A suivre.)

QUESTION 102

On considère un point A *mobile sur une demi-circonférence* BAC *de centre* O, *et les cercles inscrits aux triangles* AOB, AOC. *Trouver la position de* A *pour laquelle les centres des cercles inscrits et le centre* O *du cercle donné forment un triangle de périmètre donné* p.

Cette question que j'ai proposée, il y a déjà quelque temps, n'a pas été traitée, ou l'a été d'une façon très incomplète.



Sa solution n'offrait pourtant aucune difficulté et sa discussion présentait, il me semble, quelque intérêt. Je résumerai, comme il suit, une solution de ce problème.

Prenons pour variable indépendante l'angle ABC $= \alpha$ et calculons, en fonction de α, les longueurs OO', OO'', O'O''. Le triangle AOO' donne

$$\frac{OO'}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \qquad (OA = OB = OC = R),$$

d'où

$$OO' = R \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = Rx, \qquad \left(x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right); \qquad (1)$$

on a, d'après cela,

$$OO'' = R \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) = R\,\frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = R\,\frac{1 - x}{1 + x}. \qquad (2)$$

De l'égalité imposée

$$OO' + OO'' + O'O'' = p,$$

on déduit

$$\overline{O'O''}^2 = (p - OO' - OO'')^2,$$

ou

$$0 = p^2 - 2p\,(OO' + OO'') + 2OO' . OO''.$$

Les relations (1) et (2) donnent, pour déterminer x, l'équation

$$2x^2(R^2 + pR) - x(2R^2 + p^2) + 2pR - p^2 = 0. \qquad (3)$$

Tel est l'équation qui permet de construire $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ et, par suite, de résoudre le problème en question.

L'intérêt de la question portait surtout sur la discussion de l'équation (3), cette discussion présentant une légère difficulté.

La réalité des racines de l'équation (3) (par conséquent la possibilité du problème) dépend du signe de la quantité U,

$$U = (2R^2 + p^2)^2 - 8(R^2 + pR)(2pR - p^2).$$

En développant, on a

$$U = p^4 + 8p^3R - 4p^2R^2 - 16pR^3 + 4R^4.$$

Pour décomposer U en facteurs, et c'est ici que nous touchons à la difficulté signalée, il faut observer que l'on peut écrire U sous la forme

$$(p^4 - 4p^2R^2 + 4R^4) + 8pR\,(p^2 - 2R^2).$$

On a donc finalement

$$U = (p^2 - 2R^2)(p^2 + 8pR - R^2).$$

La discussion se poursuit alors très simplement.

G. L.

FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN

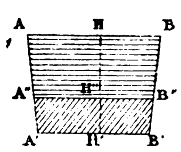
BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

(30 octobre 1885.)

Démontrer les formules qui donnent le sinus et le cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs en fonction des sinus et des cosinus de ces arcs. — Déterminer une progression géométrique connaissant la somme de ses quatre premiers termes qui est égale à 85 et l'excès du troisième terme sur le premier qui est égal à 15.

— Lois du mélange des gaz et des vapeurs.

— Dans un vase ABA'B' ayant la forme d'un tronc de cône de révolution dont les bases sont perpendiculaires à l'axe, le diamètre AB étant égal à 60^{cm}, celui de la base A'B' à 30^{cm}, la hauteur totale HH' étant 30^{cm}, qui repose par sa base A'B' sur un plan horizontal, on verse du mercure jusqu'à une hauteur $H'H'' = 12^{cm}$, puis on le remplit d'eau.



On demande :

1° De calculer le poids du mercure et de l'eau contenus dans ce vase;

2° De déterminer la pression sur la base A'B'.

(6 novembre 1885.)

Théorie du plus grand commun diviseur de deux ou plusieurs nombres.

— Calculer les angles B et C d'un triangle dont on connaît deux côtés b et c et l'angle compris A. Appliquer les formules au cas où l'on donne :

$$A = 60°$$
$$b = \sqrt[3]{0,01}$$
$$c = \cos^2 123° \ 27' \ 38'',7.$$

— Réfraction de la lumière. Angle limite.

— Un cylindre creux dont la base a une surface donnée $3,3 = 0^{mq},01$ et dont la hauteur totale H, $H = 0^m,50$ est plongé dans l'eau jusqu'à une hauteur $h = 0^m,10$. Calculer le volume du mercure qu'il faut verser dans ce cylindre pour qu'il affleure.

(9 novembre 1885.)

La base d'une pyramide triangulaire SABC est un triangle rectangle BAC, l'arête AB est perpendiculaire à cette base et a 1^m de longueur. Les deux autres arêtes SB et SC font respectivement avec AB des angles de 60° et de 30°.

1° On demande de calculer le volume de la pyramide et la longueur de la perpendiculaire AP abaissée du point A sur la face opposée BSC;

2° On construira à l'échelle de 1/10 les projections de cette pyramide en faisant coïncider l'arête AC avec la ligne de terre, et les faces ASB et ASC respectivement avec le plan vertical et le plan horizontal, et on rabattra la base BAC sur le plan vertical en la faisant tourner autour de AB, la face BSC et le point P sur le plan horizontal en les faisant tourner autour de SC.

(11 novembre 1885.)

On donne un tronc de cône droit dont le rayon R de la grande base est 7^m, le rayon r de la petite base 3^m et la hauteur h, 6^m. Déterminer sans le secours des logarithmes à quelle distance de la base inférieure on doit mener un plan parallèle à cette base pour obtenir deux troncs de cône équivalents.

— Étant données les traces d'un plan et les projections d'une droite, prouver que la condition nécessaire et suffisante pour que la droite soit perpendiculaire au plan est que les projections de cette droite soient respectivement perpendiculaires aux traces du plan.

— Devant un miroir concave de 1^m de rayon et à une distance de 25^m on place un écran. Déterminer à quelle distance de cet écran il faudra placer un objet lumineux pour que son image se forme sur l'écran.

— Coefficient de dilatation des liquides.

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

(3 novembre 1885.)

— Établir les formules qui permettent de résoudre un triangle rectiligne connaissant deux côtés et l'angle compris entre ces côtés.

— Trouver le centre de gravité d'une pyramide triangulaire.

— Trouver le centre de gravité d'un cône creux connaissant la hauteur totale h et les rayons R et r extérieur et intérieur de la base. On prendra pour inconnue la distance x du centre de gravité cherché à la base. Vers quelle limite tend x lorsque $R - r$ tend vers zéro ?

— Microscope composé.

— Calculer le poids de la vapeur d'eau à 100° qu'il faudrait injecter sur 20^{kg} de glace à 10° au-dessous de zéro pour la faire fondre et porter l'eau de fusion à 30°. Cette glace est renfermée dans un vase métallique pesant $1,000^{gr}$. On donne la chaleur spécifique de la glace, 0,5 ; sa chaleur latente de fusion, 80 ; sa chaleur latente de vaporisation 537 ; la chaleur spécifique du métal du vase 0,1.

— Tige, principales modifications de sa structure dans les plantes dicotylédones et monocotylédones.

— Cadrans solaires.

— Établir les formules qui donnent $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ en fonction des sinus et des cosinus des angles a et b; ces angles a et b étant quelconques.

— Densité des gaz.

— Propriétés du phosphore.

— On donne dans le plan horizontal un cercle de $8^{c}/^{m}$ de rayon. Ce cercle sert de base à un cône droit dont la hauteur est $15^{c}/^{m}$. On coupe le cône par un plan vertical et parallèle à une génératrice de front du cône. Ce plan est à $4\,^{c}/^{m}$ du sommet du cône. On demande :

1° De trouver la projection de l'intersection ;

2° De développer la surface et l'intersection.

QUESTIONS PROPOSÉES

202 (1). — Étant donné un contour polygonal convexe ABCDE... dont les côtés successifs forment une progression géométrique décroissante indéfinie et dont les côtés consécutifs font entre eux un angle constant :

1° On regarde les côtés du contour comme représentant des forces tirant dans le sens indiqué par l'ordre alphabétique, et on demande de trouver la résultante de toutes ces forces ;

2° Aux sommets successifs A, B, C, D... du contour on place des poids formant une progression géométrique décrois-

sante, et on demande le centre de gravité de ce système de poids;

3° On regarde les côtés du contour comme des lignes pesantes, et on demande de trouver le centre de gravité de ce contour.

(2) Sur un arc de cercle donné on prend n points équidistants sur lesquels on place des poids croissant en progression géométrique; trouver le centre de gravité de ce système de poids.

(3) Sur un mètre cube homogène on place un décimètre cube de la même matière de manière que les centres soient sur une même perpendiculaire à la face commune; sur celui-ci, on place de la même manière un centimètre cube, et ainsi de suite. Trouver la position du centre de gravité du corps ainsi formé. *(Dellac.)*

203. — On donne un cercle Δ et, à l'intérieur de ce cercle, un point fixe P. Soit Δ' une tangente fixe perpendiculaire au diamètre qui passe par P.

1° Autour de P on fait tourner une transversale qui rencontre Δ aux points Q et Q'; en ces points on élève à QQ' des perpendiculaires qui rencontrent Δ' aux points M, M' et l'on projette le point M sur PM', ou le point M' sur PM, comme l'on voudra. Trouver le lieu décrit par l'une ou l'autre de ces projections.

Ce lieu est une circonférence concentrique à la proposée et passant par P.

2° On joint AQ et AQ' et l'on projette M' sur AQ', ou M sur AQ; le lieu de ces projections est une circonférence tangente à Δ au point A et passant par le point P' symétrique de P par rapport au centre de Δ. *(G. L.)*

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 29016-3.

NOTE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

Par M. **S. Realis.**

1. — Je me propose de montrer dans cette petite note comment on peut sans faire usage d'aucun principe spécial de l'analyse indéterminée, mais par le seul emploi des identités algébriques, assigner, d'une manière directe, une infinité de solutions entières de l'équation indéterminée

$$x^2 + 2y^2 = z^2 + 2A^2, \qquad (\alpha)$$

A étant un nombre entier donné, et x, y, z devant être premiers avec A.

2. — Je me proposerai aussi la même question pour l'équation

$$x^2 + 2y^2 = A^2 + 2z^2, \qquad (\beta)$$

les entiers x, y, z devant, de même, être premiers avec le nombre donné A.

A la question I on satisfait, entre autres manières, en posant

$$x = a + A, \qquad y = 2a - A, \qquad z = 3a - A,$$

c'est-à-dire en posant l'identité

$$(a + A)^2 + 2(2a - A)^2 = (3a - A)^2 + 2A^2,$$

où l'on peut assigner à a une valeur entière arbitraire et première à la valeur absolue du nombre donné A.

A la question II on satisfait par la même relation d'identité, mise sous la forme

$$\left(\frac{4z + A}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{z - 2A}{3}\right)^2 = A^2 + 2z^2,$$

où z peut recevoir une infinité de valeurs premières au nombre donné A, et propres à rendre $4z + A$ et $z - 2A$ divisibles par 3.

Les deux questions n'en forment qu'une seule, en réalité, et les solutions s'obtiennent d'après le même principe. Inutile d'ajouter que les égalités qui précèdent, bien que renfermant

une infinité de résultats particuliers, sont loin de fournir toutes les solutions qui conviennent aux équations considérées. Par exemple, pour A = 1, la formule relative à l'énoncé I ne donne pas la solution

$$17^2 + 2 \cdot 13^2 = 25^2 + 2 \cdot 1^2,$$

et la formule relative à l'énoncé II ne donne pas la solution

$$17^2 + 2 \cdot 9^2 = 1^2 + 2 \cdot 15^2.$$

On donne une utile extension à la question en se proposant d'assigner une infinité de solutions entières de l'équation indéterminée

$$x^2 + ny^2 = u^2 + nv^2,$$

où n est un coefficient entier, non carré, et où l'une des quatre indéterminées a reçu une valeur constante, fixée d'avance.

En ce cas, si c'est le nombre v qui est donné, et que l'on ait $v = A$, on peut employer, par exemple, l'identité

$$[(n-1)a + nA]^2 + n(2a + A)^2 \equiv [(n+1)a + nA]^2 + nA^2,$$

où l'on désigne par a un entier arbitraire, positif ou négatif, et premier avec A.

Si c'est u qui est donné, et que l'on ait $u = A$, on transformera la relation précédente, en écrivant

$$(2na + A)^2 + n[(n-1)a + A]^2 \equiv A^2 + n[(n+1)a + A]^2,$$

par où l'on répond à la question au moyen de valeurs arbitraires de a, premières avec la valeur absolue de A.

Dans le cas particulier de $n = m^2 - 1$, on a, entre autres, la relation très simple

$$x^2 + (m^2-1)y^2 \equiv \left[\frac{x + (m^2-1)y}{m}\right]^2 + (m^2-1)\left(\frac{x-y}{m}\right)^2.$$

Ayant fixé d'avance, dans le premier membre de cette formule, la valeur du nombre x (ou du nombre y), premier avec m, on peut assigner immédiatement une infinité de valeurs de y (ou x), propres à rendre, dans le second membre, $x - y$ divisible par m.

Il est bon de remarquer que tout ce qui précède s'obtient très facilement, et d'une manière directe, à l'aide de l'identité donnée par Euler pour prouver que le produit de deux expressions de la forme $x^2 + ny^2$, où n est un coefficient constant, est lui-même une expression de cette forme. A

l'égard de cette identité, et de quelques autres formules analogues, très utiles dans la théorie des nombres, nous croyons ne pouvoir mieux faire ici que de renvoyer les jeunes lecteurs à la première leçon de l'excellente *Algèbre* de M. G. de Longchamps.

Nota. — L'identité d'Euler dont parle ici M. Realis est la suivante :

$$(aX - nbY)^2 + n(aY + bX)^2 = (aX + nbY)^2 + n(aY - bX)^2.$$

Comme le faisait observer M. Realis, dans une lettre qu'il m'adressait et qui concernait la légère addition qu'on va lire, en posant

$$aY - bX = A,$$

A étant un entier donné ; a, b désignant des valeurs entières arbitraires, premières entre elles ; on peut, par la méthode connue, assigner une infinité de valeurs entières à X et à Y, vérifiant l'équation précédente. De cette remarque et de l'identité d'Euler on déduit une infinité de solutions entières de l'équation (α). On peut suivre une marche analogue pour l'équation (β).

Voici d'ailleurs comment on peut résoudre complètement l'équation (α), en ramenant la détermination de toutes les solutions de cette équation à celle d'une équation indéterminée linéaire.

Soit (x, y, z) une solution quelconque de l'équation proposée ; on a

$$\frac{x - y}{A + y} = \frac{2(A - y)}{x + z} = \frac{t}{\theta},$$

t et θ désignant des entiers.

Cette égalité donne

$$x - z - ty = At,$$
$$tx + tz + 2\theta y = 2A\theta.$$

On en tire

$$t\theta x = t^2\frac{(A + y)}{2} + \theta^2(A - y)$$

et

$$t\theta z = \theta^2(A - y) - t^2\frac{(A + y)}{2}.$$

La première prouve que t divise $\theta^2(A - y)$, et comme il est premier avec θ^2 il divise $A - y$; la seconde prouve aussi que θ divise $A + y$. Il faut encore observer que A et y sont de même parité. En effet, l'égalité

$$x^2 - z^2 = 2(A^2 - y^2)$$

prouve que si A et y ne sont pas de même parité, $A - y$ et $A + y$ étant impairs, $(x - z)(x + z)$ serait divisible par 2 et non par 4; ce qui implique contradiction.

Posons donc

$$A - y = 2tu,$$
$$A + y = 2\theta v,$$

u et v désignant une solution entière de l'équation

$$A = tu + \theta v. \tag{1}$$

On obtient alors

$$\left.\begin{aligned} y &= A - 2tu = 2\theta v - A, \\ x &= tv + 2\theta u, \\ z &= 2\theta u - tv. \end{aligned}\right\}$$

Dans ces formules, A est la constante donnée; t et θ désignent deux entiers premiers entre eux et arbitrairement choisis; enfin, u et v représentent une solution quelconque de l'équation proposée.

On pourra suivre une marche analogue pour la résolution de l'équation (β), et cette méthode peut servir à résoudre un grand nombre d'équations indéterminées. On voit qu'elle peut se résumer en disant que l'on cherche d'abord toutes les solutions commensurables d'une équation donnée pour distinguer ensuite, parmi celles-ci. les solutions entières. Cette idée est d'ailleurs empruntée à la représentation des coordonnées d'un point mobile sur une courbe ou sur une surface unicursale, au moyen d'un ou de deux paramètres arbitraires.

G. L.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GEOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 8.)

87. Centre de courbure de l'hyperbole équilatère. — La solution que nous avons donnée plus haut pour déterminer le centre de courbure d'une ellipse déterminée par ses foyers et les extrémités du grand axe s'applique, avec les modifications convenables, à l'hyperbole; cette courbe étant déterminée par ses foyers et par les extrémités de l'axe transverse.

Mais nous examinerons, à cause de son importance, le cas où l'hyperbole considérée est équilatère. Nous supposerons d'ailleurs qu'elle est déterminée par ses asymptotes Δ, Δ′ et par un point M; c'est en ce point M que nous nous proposons de construire le rayon de courbure.

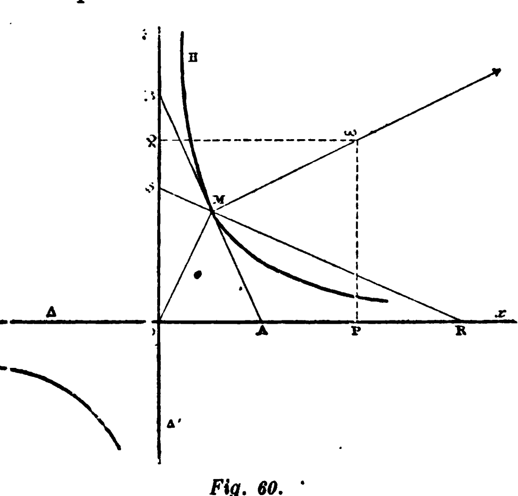


Fig. 60.

Pour démontrer la propriété qui sert de base à la construction que nous allons indiquer, il paraît commode de considérer l'hyperbole H comme une unicursale et de fixer la position du centre de courbure, c'est-à-dire les coordonnées de

ce point, au moyen d'un paramètre t qui varie, quand M se déplace sur H.

Prenons pour axes de coordonnées les asymptotes Δ, Δ' ; dans ce système, H est représentée par l'équation

$$xy = m^2.$$

Soient x', y' les coordonnées de M ; posons

$$\frac{x'}{m} = \frac{m}{y'} = t. \qquad \text{(A)}$$

La droite AB qui passe par M, tangentiellement à H, a pour équation

$$xy' + yx' = 2m^2;$$

par suite la normale $M\omega'$ est représentée par l'égalité

$$xx' - yy' = x'^2 - y'^2.$$

Les relations (A) permettent d'écrire cette égalité sous la forme

$$xt^3 - ty = mt^4 - m. \qquad (1)$$

Prenons la dérivée par rapport à t, nous avons

$$3t^2x - y = 4mt^3. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent, pour déterminer les coordonnées du centre de courbure ω, les formules

$$\frac{x}{m} = \frac{1 + 3t^4}{2t^3}, \qquad \frac{y}{m} = \frac{3 + t^4}{2t}.$$

Abaissons du point ω des perpendiculaires ωP, ωQ sur les asymptotes; en observant que nous avons

$$OA = 2x', \; OB = ay',$$

nous obtenons les relations

$$AP = m\,\frac{t^4 - 1}{2t^3}, \qquad BQ = m\,\frac{t^4 - 1}{2t}.$$

D'autre part, élevons au point M la droite RS perpendiculaire sur OM, nous trouvons

$$AR = 2AP, \quad \text{et} \quad BS = 2BQ.$$

De cette remarque, nous pouvons déduire une construction tres simple au moyen de la règle et de l'équerre du centre de courbure en un point M pris sur une hyperbole équilatère dont les asymptotes Δ, Δ' sont données de position.

Par le point donné M *on trace une droite* AB *partagée par ce point et par les asymptotes en deux parties égales; soit* $M\omega$ *la perpendiculaire à* AB. *On élève ensuite une droite* RS *perpendi-*

culaire à OM; *les parallèles aux asymptotes menées par les milieux des segments* AR *et* BS *se coupent sur* Mω, *au centre de courbure cherché.*

On observera que la droite Mω pourrait, pour cette détermination du centre de courbure, n'être pas tracée; mais la présence de cette droite dans l'épure donne à la construction indiquée une vérification précieuse.

88. Détermination du centre de courbure, les éléments donnés étant quelconques. — Lorsque la conique proposée Γ est déterminée par des éléments différents de ceux que nous avons admis dans les paragraphes précédents, le procédé le plus général que nous puissions indiquer, pour la détermination du centre de courbure, consiste à déduire des données de la conique les éléments mêmes que nous avons supposés connus.

Un exemple suffira pour faire comprendre ce que nous entendons par là.

Je prendrai le cas très simple d'une parabole P, déterminée par deux tangentes AT, AT′ et par les points de contact M, M′; cet exemple me donnera l'occasion de faire connaître une construction très élégante de la parabole, par points et par tangentes, construction qui a été indiquée par M. d'Ocagne (*).

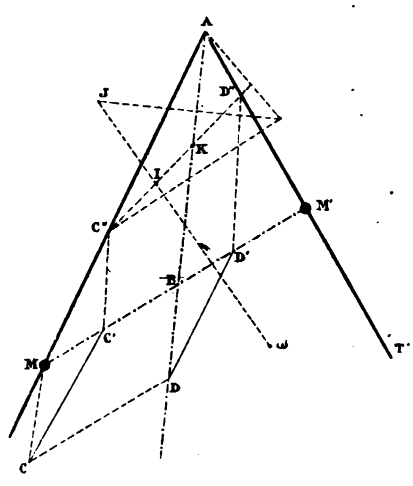


Fig. 61.

Soit AB la médiane du triangle MAM′; traçons le parallélogramme MBCD; par les points C et D menons deux parallèles quelconques CC′ DD′; puis, par C′ et D′ des droites C′C″, D′D″, parallèles à

(*) *Mathesis*, 1885; t. V, p. 26.

AB. La droite C″D′ est tangente à la parabole P, et si nous prenons C″I = KD′, le point de contact est précisément le point I.

Cette proposition que nous nous bornons à énoncer se démontre très simplement par le calcul; elle s'établit aussi immédiatement par des considérations géométriques diverses et notamment en montrant que la transversale réciproque de C″D″ par rapport au triangle MAM′ se meut en restant parallèle à une direction fixe.

Si l'on veut maintenant déterminer le centre de courbure de P (*), au point I, on peut opérer de la manière suivante, De l'orthocentre du triangle AC″D″, on abaisse une perpendiculaire Δ sur AD. La normale en I rencontre Δ en un point J; on prend Iω = 2JI; ω est le centre de courbure.

89. Remarque relative au problème de l'intersection d'une droite et d'une conique. — On a sans doute observé que nous n'avions, à aucun moment, abordé certains problèmes qu'on a quelquefois considérés comme appartenant à la géométrie de la règle, mais qui ressortent vraiment d'une géométrie supérieure; nous entendons ici, par cette expression, la géométrie du compas. Tels sont les problèmes dans lesquels on se propose de déterminer les points communs à une droite tracée Δ et à une conique bien déterminée, par certaines conditions données; ou encore ceux où l'on se propose le tracé, point par point, de coniques ayant avec une conique donnée un contact d'un certain ordre et vérifiant en outre quelques autres conditions (**), etc.

Tous ces problèmes exigent qu'une conique donnée soit tracée dans l'épure que l'on fait, ou que, à un certain

(*) M. d'Ocagne, d'après une indication qu'il nous a fournie, détermine différemment le centre de courbure; la construction qu'il donne et qui est aussi simple que celle que nous indiquons ici, doit paraître prochainement, croyons-nous, dans les *Nouvelles Annales*, dans une note qui fait suite au mémoire *sur l'enveloppe de certaines droites mobiles*, dont la première partie a été publiée (*loc. cit.*, 1883).

(**) *Géométrie de la Règle;* théorèmes et problèmes sur les contacts des sections coniques, par M. Plücker, docteur de l'Université de Bonn (*Annales de Gergonne*, t. XVII; 1825 et 1827; p. 37).

moment on fasse usage du compas; ce sont donc des problèmes du second degré, insolubles avec la règle seule. Mais le problème retombe au premier degré et ressort alors de la géométrie de la règle, dans le sens rigoureux que nous donnons à ce terme dans cet ouvrage, lorsque l'un des points communs à la conique et à la droite considérées est connu d'avance.

Nous donnerons, en terminant les problèmes relatifs aux coniques, un exemple remarquable de ce dernier genre de problèmes.

90. Problème. — *Connaissant le pied d'une normale* Δ *à la parabole* P, *trouver le second point commun à* Δ *et à* P.

Soit A' (x', y') le point symétrique de A par rapport à Ox; ayant fait la construction qu'indique la figure (construction dans laquelle AA'B, ABC, ACI sont des angles droits) on obtient sur la normale Δ un point I; il est facile de reconnaître que I est le second point d'intersection de Δ avec P.

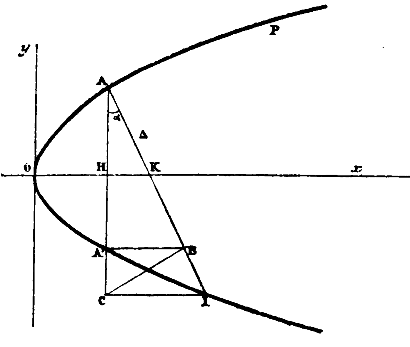


Fig. 62.

En désignant par x'', y'' les coordonnées de C, on a en effet

$$CH = -y'' = A'H + A'C = y' + A'B \operatorname{tg} \alpha = y' + 2p \operatorname{tg} \alpha,$$

ou

$$CH = -y'' = \frac{2p(x'+p)}{y'}. \qquad (1)$$

D'autre part on a

$$x'' = OH + CI = x' + (y' + CH) \operatorname{tg} \alpha = x' + \frac{p}{y'}\left[y' + \frac{2p(x'+p)}{y'}\right].$$

ou encore

$$x'' = \frac{2p(x'+p)^2}{y'^2}. \qquad (2)$$

Les formules (1) et (2) prouvent bien que

$$y''^2 = 2px''.$$

Ainsi, I est le point cherché ; il s'obtient, en faisant seulement usage de la règle et de l'équerre, par la construction qu'indique la figure. Dans cette construction, on ne suppose nullement que la parabole soit tracée ; cette courbe est déterminée par son axe, la tangente au sommet et un point A.

Mais, sans vouloir multiplier autrement ces considérations diverses, nous quittons avec cet exercice l'étude des sections coniques pour nous occuper des applications de la géométrie de la règle au tracé, par points et par tangentes, de certaines courbes d'un ordre supérieur. Nous abordons ici un sujet plus intéressant et qui ne semble pas avoir encore été exploité, du moins avec la suite et la méthode que nous allons y mettre. Les chapitres (*) que nous consacrons à cette étude compléteront la première partie de cet ouvrage ; nous développerons ensuite, dans la seconde partie, les applications pratiques de la géométrie de la règle et de l'équerre aux questions diverses qui intéressent les opérations effectuées sur le terrain et quelques problèmes que soulève l'art de la guerre. Nous rentrerons alors, pour ne plus l'abandonner, dans le champ des mathématiques élémentaires proprement dites.

CLAUDE MYDORGE (1585-1647)

NOTICE SUR UN DE SES MANUSCRITS

CONSTRUCTIONS DE GÉOMÉTRIE PRATIQUE DUES A CE MATHÉMATICIEN

Par M. **Edmond Bordage**, professeur au Collège de Nantua.

(*Suite et fin*, voir p. 12.)

Cette construction est en germe chez Baudhâyana qui dit : « *Pour faire la somme de deux carrés quelconques, avec le côté* ae *du plus petit* (fig. 4) *on fait au plus grand un accroisse-*

(*) Ces chapitres traitant de matières tout à fait étrangères aux mathématiques élémentaires seront, pour ce motif, développés dans le *Journal des Mathématiques spéciales*. Aussitôt qu'ils seront publiés, nous reprendrons ici, avec la seconde partie, l'exposition élémentaire à laquelle nous faisons allusion dans les lignes qui terminent cet article.

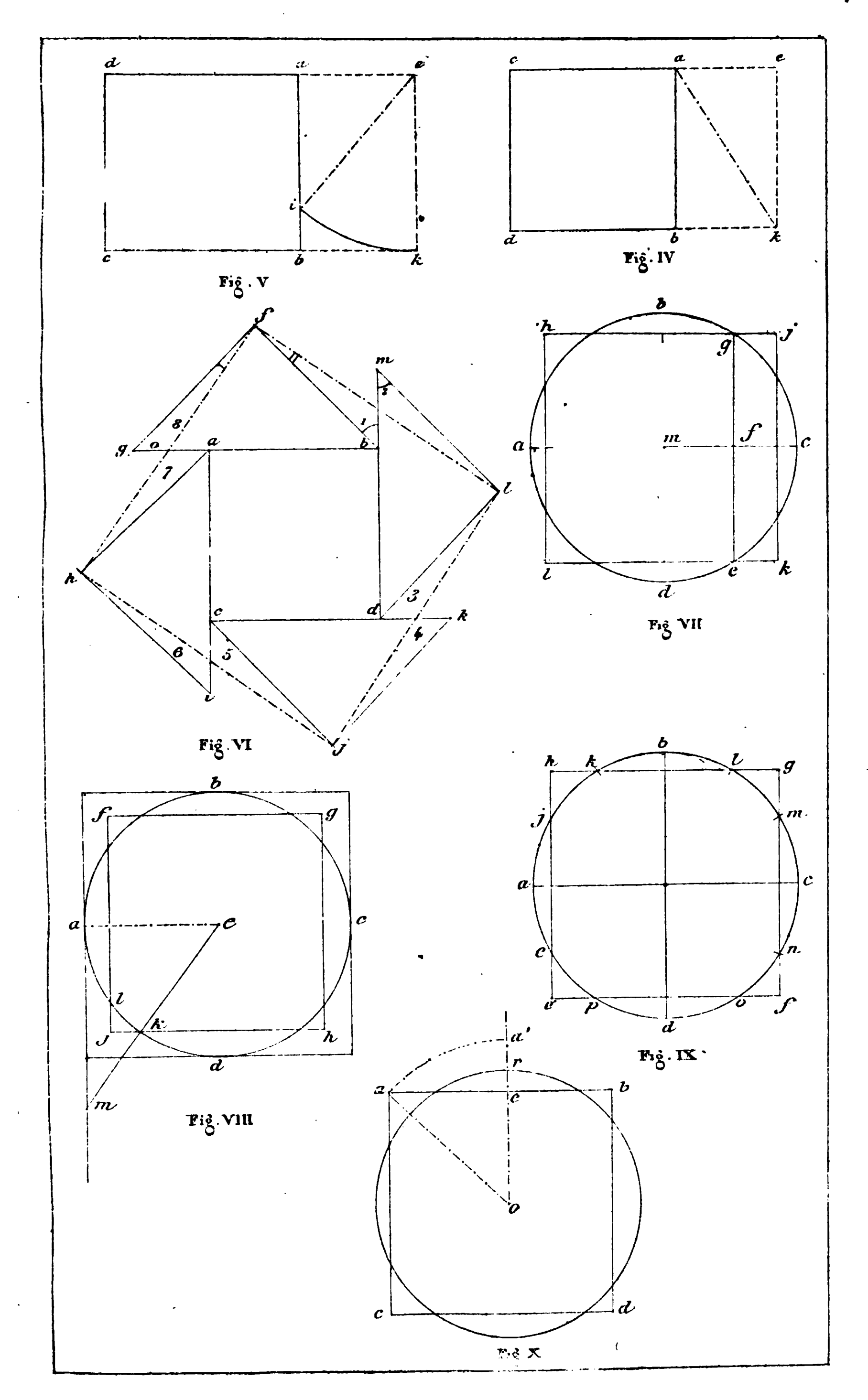


Fig. V

Fig. IV

Fig. VI

Fig. VII

Fig. VIII

Fig. IX

Fig. X

ment, un crément aebk; *la corde tendue en travers de ce crément, soit* ak, *est le côté de la somme.* »

Pour retrancher un carré d'un autre, Baudhâyana dit ensuite : « *Avec le côté de celui qu'on veut retrancher, on dessine au plus grand un crément* aebk (fig. 5) ; *un des flancs* ek *de ce crément est reporté en biais sur l'autre flanc en* ei. *Là où il tombe, on détache ce qui dépasse et le fragment restant* ai *est le côté de la différence.* »

Il avait dit précédemment : « *Dans un carré parfait, la corde tendue en biais* (la diagonale) *produit une surface de contenance double.* »

Puis : « *Si l'on prend le côté du carré, si l'on élève en l'une des extrémités une perpendiculaire égale à la ligne productrice du double* (la diagonale); *si l'on joint les extrémités de ces deux lignes perpendiculaires, la ligne en biais ainsi obtenue sera le côté d'un carré* triple *du carré primitif.* »

Aboul-Wéfa a aussi traité la question des trois carrés.

Dans ses écrits, l'énoncé est ainsi formulé : « *Former un carré avec trois briques carrées et égales.* » Sa solution très élégante, étant considérées les données *matérielles* de la question, est celle-ci : Il coupe deux des briques suivant la diagonale et applique ces demi-carrés par la diagonale autour de la troisième brique restée intacte *abcd* (fig. 6). Il tend successivement un cordeau ou pose une règle sur les nouveaux sommets *f, h, j, l.* — Les petits morceaux triangulaires tels que *fog* qui dépassent les quatre côtés *hf, fl, lj* et *jh* sont retournés et appliqués de façon à remplir les quatre petits vides tels que *hoa.*

On vérifie facilement l'exactitude de ce procédé.

Si, en effet, on supposait menées les lignes *fm, bl, lk, dj, ij, hc, af* et *gh* ; les quatre quadrilatères *fmbl, lkdj, cjih* et *fagh* seraient des parallélogrammes ; car les côtés *ml* et *fb, dl* et *jk, cj* et *hi, ah* et *fg* seraient égaux, comme côtés de l'angle droit de triangles isoscèles égaux. Ces côtés seraient aussi parallèles deux à deux. En effet, considérons un de ces quadrilatères *fmbl* par exemple. L'angle $bml = 45°$; l'angle *fbm* complément d'un angle *gbf* égal à 45°, vaut lui aussi 45°. Les angles *bml, fbm* étant égaux, on conclut de là le

parallélisme des côtés *fb* et *ml*. Le quadrilatère *fbml* est donc bien un parallélogramme, puisque deux de ses côtés opposés sont égaux et parallèles. — La démonstration serait identiquement la même pour les trois autres parallélogrammes. — Les quatre parallélogrammes considérés seraient de plus égaux, car leurs autres côtés tels que *fm*, *lk*, *ij*, *gh* seraient égaux comme appartenant à des triangles *fbm*, *ldk*, *icj*, *gah* dont on prouverait aisément l'égalité. De l'égalité des quatre parallélogrammes on déduit l'égalité de leurs diagonales; c'est-à-dire que

$$fl = lj = hj = fh.$$

La figure *hflj* est donc un losange. Prouvons maintenant que les angles sont droits. Considérons l'un de ces angles $\widehat{hfl}$, par exemple. On voit qu'on peut obtenir cet angle en retranchant de l'angle droit *gfb* la partie $\widehat{gfo}$ et en ajoutant au reste $\widehat{ofb}$ la partie $\widehat{bfl}$ qui est, nous le savons, égale à $\widehat{gfo}$ *(d'après l'égalité des parallélogrammes)*. L'angle *hfl* est donc aussi droit. On prouve de la sorte que le losange *hflj* est un carré, puisque ses angles sont droits. Il est évident aussi que les petits triangles désignés sur la figure 6 par les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 *(les chiffres pairs désignant les triangles intérieurs au carré* hflj *et les chiffres impairs les triangles extérieurs)* sont égaux comme appartenant à des parallélogrammes égaux. On pourra donc remplir les vides triangulaires 1, 3, 5, 7 par les petits triangles de brique 2, 4, 6, 8. Ce qui prouve bien que les trois briques données disposées comme il a été dit forment exactement le carré *hflj*.

Mydorge donne, dans son manuscrit, trois constructions pour faire un carré égal à un cercle donné. Voici ces trois constructions :

1° « *Il faut diviser le semi-diamètre en deux parties égales par une perpendiculaire menée d'une part et d'autre jusqu'à la circonférence. Le carré décrit de cette ligne sera égal au cercle donné.* » Il dit aussi : « *Le cercle* abcd (fig. 8), *le semi-diamètre* mc *estant donnés, je divise* mc *également au point* f, *auquel je descris la perpendiculaire* efg ; *de laquelle je descris le quarré* hjkl *égal au cercle* abcd. »

(Il faut observer que le carré *hjkl* doit être construit de

façon que les points *a*, *b*, *c*, *d* soient les milieux des côtés de ce carré.)

2° « *Après avoir descrit le quarré à l'entour de la circonférence* (le carré circonscrit), *il faut diviser le quart du cercle en trois parties égalles et du centre par la section inférieure mener une ligne droite tant qu'elle rencontre le costé du quarré estant continué, et la partie d'entre le diamètre et la section donnera le costé du quarré.*

» *Le cercle* abcd (fig. 8) *estant donné et le quart* ad *divisé en trois parties égalles*, k *estant le point de division inférieur, je descris la ligne* em ; *et* am *donnera le costé du quarré qui est* fgjh, *lequel est égal au cercle donné* abcd.

3° » *Il faut diviser le cercle en quatre parties égalles par deux diamètres et diviser chaque quart de la circonférence en trois parties égalles et de deux sections en deux sections mener une ligne droicte, lesquelles quatre droictes menées d'une part et d'autre feront un quarré égal au cercle donné.*

» *Le cercle* abcd (fig. 9) *étant divisé en quatre parties égalles par deux diamètres* ac *et* bd *et la quarte partie de chaque circonférence en trois parties égalles, ce qui donne les points* j, k, l, m, n, o, p, e, *de section en section, je mène les lignes droictes* e'f, fg, gh *et* he' *qui font le quarré* e'fgh *égal au cercle* abcd. »

Baudhâyana avait lui aussi traité la question de la quadrature du cercle et la question qui consiste à transformer un carré en un cercle équivalent. Voici quelles étaient les constructions qu'il employait :

1° « *Pour faire d'un carré un cercle, on rabattra* (fig. 10), *à partir du centre la moitié de la diagonale sur la ligne* eo. *Avec celle-ci et le tiers de ce qui dépasse* $\left(\mathrm{oe} + \frac{1}{3}\mathrm{ea}'\right)$, *on tracera le cercle qui sera équivalent au carré donné* abcd.

2° » *Pour faire d'un cercle un carré, on fait* 8 *parts du diamètre ; une de ces parts sera divisée en* 29 *portions dont on retirera* 28 $\left(\textit{et il restera } \frac{1}{29}\cdot\frac{1}{8}\right)$ *ainsi que* $\frac{1}{6}$ *d'une portion diminuée de son propre huitième.* »

Ou en chiffres

$$D.\left[\frac{7}{8}+\frac{1}{8.29}-\left(\frac{1}{29.8}.\frac{1}{6}-\frac{1}{8}.\frac{1}{29.8.6}\right)\right]$$

ou encore

$$D.\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{8.29}-\frac{1}{8.29.6}+\frac{1}{8.29.6.8}\right),$$

« *Ceci étant le côté du carré équivalent, le coefficient en série* est $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. »

Il ajoute encore : « *Où bien on fera* 15 *parts du diamètre, desquelles on retranchera* 2 ; *telle est la racine imparfaite du carré équivalent au cercle.* » Mais comme $\frac{13}{15}$ est la valeur connue de $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ employée par Héron pour la surface du triangle équilatéral, nous retombons dans la construction de Claude Mydorge. Du reste, Baudhâyana lui-même la déclare « imparfaite » (à-nityâ). C'est le terme qu'il emploie.

Nous venons de citer quelques-unes des questions contenues dans le manuscrit de Claude Mydorge, retrouvé par M. Charles Henry. A côté de ces questions, on trouve de remarquables constructions de polygones inscrits et à côtés donnés, d'élégants procédés de trisection de l'angle et de transformation de surface, etc. — Ces questions sont pleines d'intérêt, et elles nous paraissent dignes d'être introduites dans l'enseignement secondaire et, surtout, dans l'*enseignement professionnel.*

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. PICQUET, *répétiteur à l'École Polytechnique.*

Monsieur le rédacteur,

Vous avez bien voulu me faire part des doutes émis par un de nos collègues relativement à l'existence d'une solution élémentaire pour l'une des questions proposées à l'examen écrit de l'École forestière en 1885. Je m'empresse de vous

communiquer celle que j'aurais désiré rencontrer dans les copies des candidats; et, si vous vous placez à ce point de vue qu'une question de concours doit se décomposer en plusieurs parties de difficulté successivement croissante, de façon à permettre le classement des candidats, je pense que vous apprécierez avec moi que la question dont il s'agit n'était pas de nature à mériter les reproches de notre collègue.

L'énoncé était le suivant :

Effectuer la division $\frac{1}{(1-x)^3}$, *trouver la loi du quotient, et chercher, par les règles de la division, à quelle condition le quotient, prolongé indéfiniment, représente la fraction proposée.*

Solution. — *Première partie.* Effectuer la division, et induire par l'observation la loi du quotient

$$1 + 3x + 6x^2 + \dots + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} + \dots$$

Cette première partie, très simple, a été traitée par la plus grande partie des candidats.

Deuxième partie. — Démontrer la loi induite, en observant également la loi des restes, admettant l'une et l'autre jusqu'au reste qui suit l'inscription au quotient du terme en x^{n-1}, et prouvant qu'elles subsistent pour le terme suivant du quotient, et pour le reste suivant.

Je ne crois pas utile d'insister sur ce côté de la question qui, quoique moins simple que le précédent et n'ayant été traité que par un nombre beaucoup plus restreint de candidats, n'offre aucune difficulté.

Troisième partie. — Il résulte de ce qui précède que le reste obtenu après que l'on a écrit au quotient le terme $\frac{1}{2}n(n+1)x^{n-1}$ est

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n - n(n+2)x^{n+1} + \frac{1}{2}n(n+1)x^{n+2}.$$

On a donc, d'après l'identité de la division, en désignant ce reste par R,

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + \dots + \frac{1}{2}n(n+1)x^{n-1} + \frac{R}{(1-x)^3}.$$

ou

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + \ldots + \frac{1}{2}n(n+1)x^{n-1}$$
$$+ \frac{x^n}{2(1-x)^3}[(n+1)(n+2) - 2n(n+2)x + n(n+1)x^2].$$

Si $x \geqslant 1$, il est clair que le terme complémentaire du second membre augmente indéfiniment avec n.

Si l'on a, au contraire, $x < 1$, j'écris ce terme

$$\frac{n(n+1)(n+2)x^n}{2(1-x)^3}\left[\frac{1}{n} - \frac{2x}{n+1} + \frac{x^2}{n+2}\right];$$

le second facteur tend évidemment vers zéro à mesure que n augmente. Quant au premier, si l'on passe d'une valeur de n à la suivante, on le multiplie par $\frac{n+3}{n}x$, expression plus petite que l'unité dès que l'on a

$$n > \frac{3x}{1-x},$$

et qui va toujours en diminuant. Les valeurs successives du premier facteur sont donc constamment inférieures, à partir d'une certaine valeur de n, à celles des termes d'une progression géométrique dont la raison serait l'une quelconque des valeurs, inférieures à l'unité, de la quantité $\frac{n+3}{n}x$; par suite il tend vers zéro, et le quotient, prolongé indéfiniment, représente la fraction proposée.

Je ne pense pas, Monsieur le Rédacteur, être sorti dans cette démonstration des limites du programme de l'École forestière, puisque je n'ai invoqué que l'identité de la division et la théorie des progressions géométriques, et je suppose que vous trouverez avec moi que cette troisième partie de la question, sans être au-dessus de la force des meilleurs candidats, était propre à les révéler. Que si notre estimable collègue tirait quelque objection de ce fait qu'il y est fait usage d'autre chose que des règles de la division, sa dialectique pourrait paraître subtile en ce sens que, si l'énoncé vise évidemment l'identité de la division, il ne s'oppose en quoi que ce soit à l'emploi ultérieur d'autres propriétés.

Enfin, j'ajouterai que la démonstration suivante, relative au

cas où $x < 1$, très élémentaire, eût encore été considérée comme très suffisante et parfaitement accueillie, une fois la question entamée comme plus haut avec l'identité de la division.

On a, pour $x < 1$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$$x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{x}{1-x}$$

$$x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{x^2}{1-x}$$

. . . .

d'où, en ajoutant

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots =$$

$$\frac{1}{1-x}(1 + x + x^2 + \dots) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

De même, en multipliant successivement par x, x^2, ...

$$x + 2x^2 + \dots + nx^n + \dots = \frac{x}{(1-x)^2},$$

$$x^2 + \dots + (n-1)x^n + \dots = \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

. . . .

d'où en ajoutant

$$1 + 3x + 6x^2 + \dots \frac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n + \dots =$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}[1 + x + x^2 + \dots] = \frac{1}{(1-x)^3} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nota. — Je puis dire que je partage complètement l'opinion de M. Picquet et je trouve, avec lui, que la question proposée aux examens écrits de l'Ecole forestière admettait une solution qui ne dépassait nullement la force des meilleurs candidats à cette école; la rédaction qu'on vient de lire en est bien la preuve. Mais je dois ajouter qu'en lui transmettant les doutes auxquels il a été fait allusion, au début de cette note, le collègue qui me les communiquait ne les a pas accompagnés d'une critique quelconque. Il avait, me disait-il, quelque peine à voir comment on pouvait

résoudre la question posée, sans dépasser les limites des mathématiques élémentaires. J'ai prié M. Picquet de vouloir bien lever les doutes qui m'avaient été transmis; telle est l'origine de la présente lettre. Je pense qu'elle donnera pleine satisfaction à notre collègue; les candidats à l'École forestière la consulteront aussi avec intérêt, et il ne me reste plus qu'à remercier M. Picquet de l'obligeance avec laquelle il a répondu au désir que je lui témoignais.

G. L.

Extrait d'une lettre de M. Aug. Poulain, *à Angers.*

... La démonstration donnée page 7, pour établir le théorème relatif au carré du côté d'un triangle, peut être abrégée comme il suit et avec cette particularité avantageuse qu'elle s'adresse également bien au cas où le point B est intérieur ou extérieur au cercle considéré dans la démonstration de M. Mosnat.

En considérant la transversale qui passe par le centre du cercle, on voit que la puissance du point B par rapport au cercle CC′ est égale à $\pm\left(\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2\right)$. Le signe + doit être pris dans le cas du point extérieur, le signe — dans l'hypothèse contraire.

Plaçons-nous dans le premier cas, lequel correspond à la figure (*).

Nous avons

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = BC \,.\, BC' = BC(BC - 2CD),$$

ou

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \,.\, CD.$$

C. Q. F. D.

(*) Le lecteur est prié de se reporter à la figure de la page 7, mais les lignes AE, BE de cette figure sont inutiles dans la présente démonstration.

Comme nous le fait observer avec raison M. Poulain, dans une autre lettre, on peut ainsi établir le théorème de Pythagore, et d'une façon bien simple, en décrivant un cercle ayant pour centre l'une des extrémités B de l'hypoténuse BC, et pour rayon le côté BA qui y aboutit. La puissance du point C par rapport à ce cercle est représentée par $\overline{CA}^2$ ou encore par (CB — BA) (CB + BA). D'où résulte la relation de Pythagore.

Mais nous croyons que cette remarque a été faite depuis longtemps et il est probable que la démonstration précédente fait partie de la collection des 70 (?) démonstrations connues du théorème en question. G. L.

QUESTION 101

Solution par M. Lucien Lévy.

Sur la bissectrice de l'angle droit d'un triangle ABC, *rectangle en* A, *on prend un point* M. *Soit* D *le point où la bissectrice rencontre l'hypoténuse,* P *la projection de* M *sur* AC. *Déterminons ce point* M *de façon que la somme des aires des triangles* BMD *et* MPC *soit égale à une surface donnée.*

Soit AM $= x$, AD $= d$, $\frac{s\sqrt{2}}{4}$ la surface donnée. Abaissons de B la perpendiculaire BH $= \frac{c\sqrt{2}}{2}$ sur la bissectrice. Si l'on remarque que AP $=$ PM $= \frac{x\sqrt{2}}{2}$, on obtient immédiatement l'équation du problème

$$\frac{1}{2}(d-x)\frac{c\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\left(b - \frac{x\sqrt{2}}{2}\right)\frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{s\sqrt{2}}{4},$$

ou
$$(d-x)c + \left(b - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)x = s, \qquad (1)$$

ou
$$x^2 + (c-b)x\sqrt{2} + (s-cd)\sqrt{2} = 0. \qquad (2)$$

La discussion de cette équation n'offre aucune difficulté: on la simplifiera en distinguant le cas où c est plus grand que b. Il est alors nécessaire que l'on ait

$$s < cd, \qquad (3)$$

et une seule racine est positive. Pour qu'elle convienne, il faut qu'elle soit inférieure à d; ce qui donne, en substituant d dans le premier membre de l'équation (2),

$$d^2 - bd\sqrt{2} + s\sqrt{2} > 0,$$

ou
$$s\sqrt{2} > (b\sqrt{2} - d)d,$$

ou encore
$$s\sqrt{2} > \frac{bd^2}{c}. \qquad (4)$$

Les conditions (3) et (4), compatibles à cause de $c > b$, suffisent.

Si c est inférieur à b, la condition de réalité des racines de l'équation (2) fournit l'inégalité

$$s \leqslant \frac{(b-c)^2 + 2cd\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Pour achever la discussion, il restera à exprimer que x est positif et inférieur à d, c'est-à-dire à comparer s aux quantités cd et $\frac{bd^2}{c}$ dont chacune peut être plus grande que l'autre. Cette discussion n'offre aucune difficulté ; j'examinerai seulement un cas.

$$\text{Soit } \frac{bd^2}{c} < cd < \frac{(b-c)^2 + 2cd\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}.$$

Si s est inférieur à $\frac{bd^2}{c}$, les racines sont de signes contraires et d est entre ces racines; donc aucune ne convient. Si s est entre $\frac{bd^2}{c}$ et cd, les racines sont de signes contraires, d est plus grand que les deux, la positive convient donc. Si enfin s est entre cd et $\frac{(b-c)^2 + 2cd\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$, les deux racines sont positives et conviennent, comme il est facile de s'en assurer.

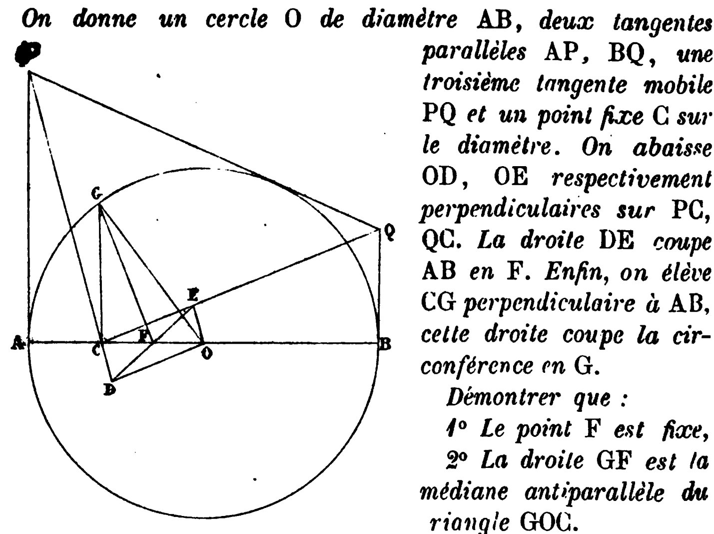
Les autres cas s'examineraient de même; mais il est préférable de généraliser l'énoncé de manière à n'avoir aucune restriction de grandeur pour la variable x. En donnant au point M diverses positions sur les prolongements de la bissectrice dans les deux sens, on vérifiera aisément que l'énoncé pourra être conservé, à condition de compter comme négative l'aire du triangle BMD dès que le point M a dépassé le point D dans le sens AD, et comme négative l'aire du triangle MPC dès que le point M, se déplaçant dans le même sens, a dépassé le symétrique de A par rapport au point D. Lorsque le point M est sur le prolongement de AD, du côté de A, il faut considérer la distance AM comme négative et l'aire du triangle MPC aussi comme négative. Ces conventions se présentent d'elles-mêmes: le changement de signe de l'aire d'un triangle provient toujours du changement de sens d'une base ou d'une hauteur.

Nota. — Autre solution par M. Bordage.

QUESTION 167

Solution par M. Étienne THÉVENET, de Thiers.

On donne un cercle O *de diamètre* AB, *deux tangentes parallèles* AP, BQ, *une troisième tangente mobile* PQ *et un point fixe* C *sur le diamètre. On abaisse* OD, OE *respectivement perpendiculaires sur* PC, QC. *La droite* DE *coupe* AB *en* F. *Enfin, on élève* CG *perpendiculaire à* AB, *cette droite coupe la circonférence en* G.



Démontrer que :

1° Le point F *est fixe,*

2° La droite GF *est la médiane antiparallèle du triangle* GOC.

1° Le quadrilatère inscriptible CEOD donne

$$\frac{CF}{OF} = \frac{CD \times CE}{OE \times OD}. \qquad (1)$$

Les deux triangles semblables COD, APC donnent

$$\frac{CD}{OD} = \frac{R - OC}{AP}. \qquad (2)$$

De même les deux triangles semblables COD, APC donnent

$$\frac{CE}{OE} = \frac{R + OC}{BQ}. \qquad (3)$$

Multipliant membre à membre (2) et (3), on a

$$\frac{CE \times CD}{OD \times OE} = \frac{R^2 - \overline{OC}^2}{AP \times BQ}.$$

Comparant la dernière égalité à la première, on a

$$\frac{FC}{OF} = \frac{R^2 - \overline{OC}^2}{AP \times BQ};$$

or $$AP \times BQ = R^2,$$

d'où $$\frac{CF}{OF} = \frac{R^2 - \overline{OC}^2}{R^2}.$$

Donc le point F est fixe.

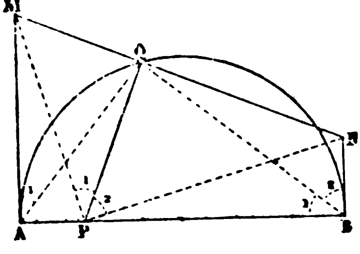
2° GF est la médiane antiparallèle du triangle GOC, puisque dans ce triangle nous avons

$$\frac{CF}{OF} = \frac{R^2 - \overline{OC}^2}{R^2} = \frac{\overline{CG}^2}{\overline{OG}^2}.$$

Nota. — Solutions analogues par MM. Chapron, à Bar-sur-Aube; G. Nesly, à la Guadeloupe; L. Prince, élève au lycée de Grenoble.

QUESTIONS PROPOSÉES

204. — On considère un cercle et un diamètre AB, un point P sur AB et les tangentes aux points A et B.



Par P on mène une semi-droite mobile qui rencontre le cercle en Q et, par le point Q, on trace une droite perpendiculaire à PQ qui rencontre les tangentes fixes aux points M, N.

On détermine ainsi deux quadrilatères dans lesquels on mène les diagonales; trouver le lieu décrit par le point de concours de ces diagonales : 1° dans le quadrilatère APQM; 2° dans le quadrilatère PQBN.

Ce lieu est l'ensemble de deux ellipses dont les axes sont proportionnels, le grand axe de la première étant égal au petit axe de la seconde. *(G. L.)*

Nota. — Pour faciliter la recherche de la solution demandée on peut observer : 1° que MPN est un angle droit; 2° qu'en posant PA $= h$, BP $= h'$, on a

$$\text{tg MAQ . tg AQP} = \frac{h}{h'};$$

3° Que les ellipses indiquées dans l'énoncé se déduisent des cercles décrits sur AP et sur BP comme diamètres en déformant les ordonnées de ces cercles dans un rapport constant.

On peut aussi noter, parmi les propriétés de la figure, que le produit AM . BN est constant et que la droite qui joint les deux points dont nous avons demandé le lieu géométrique, est parallèle à AB.

205. — Résoudre l'équation

$$a(a + x)(a + 2x)(a + 3x)$$
$$= b(b + x)(b + 2x)(b + 3x).$$

(*G. L.*)

Errata. 1. — (*Journal* 1885, p. 117). Il faut substituer le point O_{p+1} au point O_{p-1} et par suite, écrire :

Ligne 11 : $\dfrac{x_p - x_{p+1}}{b} = a\left[\dfrac{1}{a + pb} - \dfrac{1}{a + (p + 1)b}\right]$

au lieu de $\dfrac{x_{p-1} - x_p}{b} =$ id.

Ligne 15 : $\dfrac{O_pO_{p+1}}{BD} = \dfrac{ab}{(a + pb)[a + (p + 1)b]}$

au lieu de $\dfrac{O_pO_{p-1}}{BD} =$ id.

Ligne 18 : $\dfrac{O_2O_3}{BD} = \dfrac{1}{10}$

au lieu de $\dfrac{O_2O_1}{BD} = \dfrac{1}{10}$

(Communiqué par M. Monsallut, professeur au collège de St-Jean-d'Angély).

2. — (*Journal*, p. 11, 1886)

Dernière ligne, *au lieu de* HD, *lisez* DD'

(Id. p. 12), *au lieu de* l'épreuve du tracé, *lisez* l'épure du tracé.

3. — (Id. p. 15), ligne 19 *lisez* $\overline{DL}^2 = \overline{LG}^2 + \overline{DG}^2$ *et non* $\overline{DL}^2 - \overline{LG}^2 + \overline{DG}^2$; et, même page ligne 10 (en remontant) *lisez* $\overline{DS}^2$ *et non* $\overline{DS}^3$.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 2322 6.

PROBLÈME DE MÉCANIQUE

Par M. **Éd. Guillet,** professeur au Lycée d'Avignon.

Une sphère, dont l'élasticité est parfaite, tombe d'une hauteur h *sur un plan incliné d'un angle* α *sur l'horizon. Elle rebondit, suivant la loi connue de l'égalité d'angles d'incidence et de réflexion, pour venir rencontrer le plan incliné, une seconde fois, puis une troisième, et ainsi de suite. — On demande de calculer l'amplitude de chaque bond, ainsi que l'angle sous lequel la bille vient rencontrer le plan à chaque nouvelle incidence.*

Soient A le point de départ de la sphère et B le point où elle rencontre le plan incliné pour la première fois. Nous prendrons pour plan de la figure le plan vertical dans lequel reste constamment la sphère, c'est-à-dire celui qui est déterminé par la verticale AB et la ligne de plus grande pente BX du plan incliné.

La vitesse acquise v_0 pendant la chute AB de hauteur h est

$$v_0 = \sqrt{2gh}, \qquad (1)$$

et l'angle ABN formé par la verticale AB avec la normale BN au plan incliné en B est égal à α.

Au point B la sphère rebondit avec la vitesse v_0 et dans une direction BC faisant avec BN l'angle α.

Nous sommes donc, pour le premier bond, ramenés à étudier le mouvement d'un corps pesant lancé avec la vitesse initiale v_0 dans la direction BC.

On sait que la trajectoire est une parabole; de sorte qu'il suffira de déterminer le point d'intersection B′ de cette parabole avec la droite BX, en même temps que la tangente à la courbe en B′.

Désignons par a la base OX du plan incliné, par v_x et v_y les projections horizontale et verticale de la vitesse à un instant quelconque t ou, ce qui est la même chose, les vitesses des projections horizontale et verticale du mouvement de l'espace :

enfin par x et y les coordonnées du point de la trajectoire occupé par la sphère à l'époque t.

Nous avons :

$$v_x = v_0 \sin 2\alpha, \tag{2}$$
$$v_y = v_0 \cos 2\alpha - gt, \tag{3}$$
$$x = v_0 t \sin 2\alpha, \tag{4}$$
$$y = v_0 t \cos 2\alpha - \frac{1}{2} g t^2 + a \operatorname{tg} \alpha; \tag{5}$$

en prenant pour axes de coordonnées les deux droites rectangulaires OX et OA et en remarquant que l'angle de BC avec l'horizontale est $\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$.

Eliminant t entre les équations (4) et (5), nous aurons la relation qui lie à chaque instant les coordonnées d'un point quelconque de la trajectoire :

$$y = a \operatorname{tg} \alpha + x \operatorname{cotg} 2\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \sin^2 2\alpha}. \tag{6}$$

En appelant (x_1, y_1) les coordonnées du point B', on aura donc aussi, puisque ce point appartient à la trajectoire :

$$y_1 = a \operatorname{tg} \alpha + x_1 \operatorname{cotg} 2\alpha - \frac{gx_1^2}{2v_0^2 \sin^2 2\alpha}. \tag{7}$$

Mais le point B' appartenant encore à la droite BX, les deux triangles semblables OBX et O'B'X donnent

$$\frac{\text{OB}}{\text{O'B'}} = \frac{\text{OX}}{\text{O'X}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{a \operatorname{tg} \alpha}{y_1} = \frac{a}{a - x_1}. \tag{8}$$

Les deux équations (7) et (8) déterminent les deux inconnues x_1 et y_1.

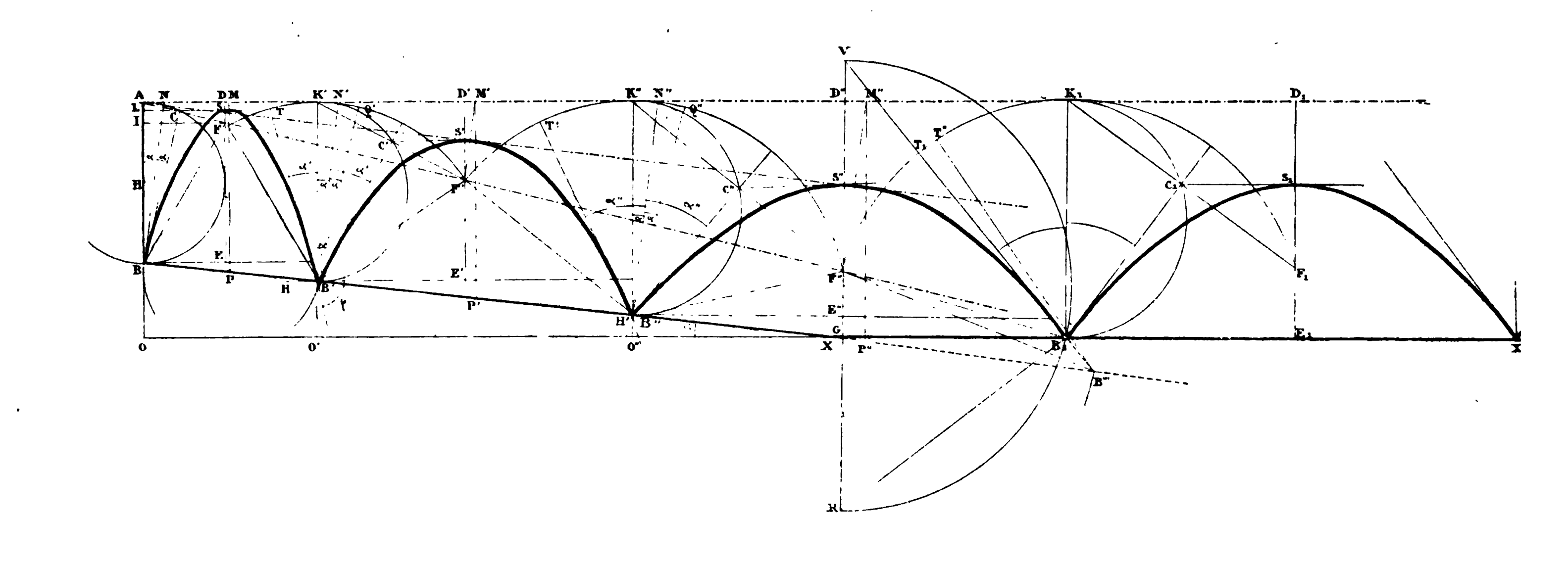
De la dernière, on tire

$$y_1 = a \operatorname{tg} \alpha - x_1 \operatorname{tg} \alpha,$$

et, en portant dans l'équation (7), on a

$$x_1[gx_1 - 2v_0^2 \sin^2 2\alpha(\operatorname{cotg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha)] = 0. \tag{9}$$

On a une première solution : $x_1 = 0$, qu'il était facile de prévoir et qui correspond au point B ; ce n'est pas celle-là que nous cherchons.



A
N
D
M
K'
N'
D'
M'
K''
N''
D''
M''
K₁
D₁
V
L
I
H
B
C
F
T
Q'
C'
S'
F'
E'
P'
T'
C''
S''
F''
E''
H''
B''
G
O
O'
O''
X
P''
B₁
B'''
T₁
C₁
S₁
F₁
E₁
R

La deuxième solution

$$x_1 = \frac{2v_0^2 \sin^2 2\alpha(\text{cotg } 2\alpha + \text{tg } \alpha)}{g}$$

correspond au point B'.

On a d'ailleurs

$$\text{cotg } 2\alpha + \text{tg } \alpha = \frac{\cos 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha \sin \alpha}{\sin 2\alpha \cos \alpha},$$

et

$$\cos 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha \sin \alpha = \cos \alpha.$$

Donc, en résumé

$$x_1 = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha. \qquad (10)$$

Remplaçant v_0^2 par $2gh$ pour que x soit connu uniquement en fonction des données, on aura

$$x_1 = 4h \sin 2\alpha. \qquad (11)$$

En portant cette valeur de x_1 dans la relation (8), on aura

$$y_1 = (a - 4h \sin 2\alpha) \text{ tg } \alpha. \qquad (12)$$

Durée du premier bond. — Si l'on veut obtenir le temps t_1 au bout duquel le mobile atteint le point B', il suffit de remplacer x_1 par la valeur qui vient d'être trouvée dans la formule

$$x_1 = v_0 t_1 \sin 2\alpha,$$

d'où l'on déduit

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0 \sin 2\alpha};$$

et, par suite

$$t_1 = \frac{4h \sin 2\alpha}{v_0 \sin 2\alpha},$$

c'est-à-dire

$$t_1 = \frac{2v_0}{g}, \quad \text{ou} \quad t_1 = \sqrt{\frac{8h}{g}}. \qquad (13)$$

Calcul de l'amplitude BB'. — Observons que, dans le trapèze rectangle OBO'B', on a

$$BB' = \frac{OO'}{\cos \alpha}$$

ou

$$BB' = \frac{x_1}{\cos \alpha}.$$

On a donc, en désignant par A l'amplitude du premier bond,

$$A = \frac{4h \sin 2\alpha}{\cos \alpha};$$

et, si l'on remplace $\sin 2\alpha$ par $2 \sin \alpha \cos \alpha$, il vient

$$A = 8h \sin \alpha. \qquad (14)$$

Angle d'incidence au point B'. — En désignant par v_{x_1} et v_{y_1} les composantes horizontale et verticale de la vitesse de la sphère en B' et par φ l'angle de la direction de cette vitesse avec l'horizon, on aura

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_{y_1}}{v_{x_1}}.$$

Or

$$v_{x_1} = v_0 \sin 2\alpha, \qquad (15)$$
$$v_{y_1} = v_0 \cos 2\alpha - gt_1,$$

ou

$$v_{y_1} = v_0 \cos 2\alpha - g \frac{2v_0}{g}.$$

D'ailleurs

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

donc

$$v_{y_1} = - v_0(1 + 2 \sin^2 \alpha). \qquad (16)$$

Cette valeur négative de la composante verticale v_{y_1} de la vitesse montre qu'en B' la sphère descendrait si elle n'était arrêtée par le plan incliné.

On a maintenant

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{1 + 2 \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha}.$$

On voit que l'angle φ est négatif, c'est-à-dire que la vitesse en B' est dirigée au-dessous de l'horizontale de ce point.

Si l'on considère l'angle TB'H, opposé par le sommet à l'angle φ, on aura

$$\operatorname{tg} \text{TB'H} = \frac{1 + 2 \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Or l'angle N'B'T de la vitesse en B' avec la normale B'N' au plan incliné est égal à $\left[\frac{\pi}{2} - (\varphi - \alpha)\right]$; en appelant α' cet

angle N'B'T, on aura donc

$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{cotg} (\varphi - \alpha),$$

ou

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha}.$$

En remplaçant $\operatorname{tg} \varphi$ par la valeur absolue précédemment trouvée, il vient

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{1 + \dfrac{1 + 2 \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha} \times \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\dfrac{1 + 2 \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha} - \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}},$$

ou

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha + 2 \sin^3 \alpha}{\cos \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha}.$$

Remplaçons $\sin 2\alpha$ par $2 \sin \alpha \cos \alpha$, et nous avons

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sin \alpha \left[1 + 2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha\right]}{\cos \alpha}.$$

D'ailleurs

$$1 + 2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 3.$$

On obtient ainsi ce résultat simple

$$\operatorname{tg} \alpha' = 3 \operatorname{tg} \alpha. \tag{17}$$

Vitesse v_1 *du mobile en* B'. — Si l'on veut avoir la vitesse absolue v_1 de la sphère en B', il suffit d'appliquer la formule

$$v_1^2 = v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2.$$

On a donc

$$v_1^2 = v_0^2 \left[\sin^2 2\alpha + (1 + 2 \sin^2 \alpha)^2\right].$$

Or

$$\begin{cases} \sin^2 2\alpha = 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ (1 + 2 \sin^2 \alpha)^2 = 1 + 4 \sin^2 \alpha + 4 \sin^4 \alpha \\ 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 4 \sin^2 \alpha - 4 \sin^4 \alpha. \end{cases}$$

Ainsi

$$v_1^2 = v_0^2 \left[1 + 8 \sin^2 \alpha\right]. \tag{18}$$

Détermination du point S *le plus élevé dans le premier bond.* — La direction de la vitesse au point S étant horizontale, la composante verticale de cette vitesse sera nulle en ce point, et si nous appelons t' le temps nécessaire à la sphère pour atteindre ce point S, nous aurons

$$v_0 \cos 2\alpha - gt' = 0,$$

d'où l'on déduit

$$t' = \frac{v_0 \cos 2\alpha}{g}.$$

Les coordonnées x et y du point S seront déterminées en remplaçant t par la valeur de t' dans les relations :

$$x = v_0 t \sin 2\alpha,$$

$$y = v_0 t \cos 2\alpha - \frac{1}{2} gt^2 + a \operatorname{tg} \alpha,$$

ce qui donne

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{g},$$

$$y = \frac{v_0^2 \cos^2 2\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \cos^2 2\alpha}{g^2} + a \operatorname{tg} \alpha.$$

Et, en remplaçant $\frac{v_0^2}{2g}$ par h et simplifiant, on a :

$$x = h \sin 4\alpha, \qquad (19)$$

$$y = a \operatorname{tg} \alpha + h \cos^2 2\alpha. \qquad (20)$$

Si l'on se rappelle que $OB = a \operatorname{tg} \alpha$, on voit que la hauteur ES du sommet S au-dessus de l'horizontale BM qui passe en B est

$$SE = h \cos^2 2\alpha. \qquad (21)$$

Remarque. — On aurait encore pu obtenir l'abscisse x du point S en cherchant le maximum de la fonction (6), ce qui revient à exprimer que l'équation

$$\frac{gx^2}{2v_0^2 \sin^2 2\alpha} - x \operatorname{cotg} 2\alpha - a \operatorname{tg} \alpha + y = 0$$

a ses deux racines égales.

On a ainsi

$$x = \frac{v_0^2 \sin^2 2\alpha \operatorname{cotg} 2\alpha}{g},$$

ou

$$x = h \sin 4\alpha, \qquad (19)$$

et

$$y = a \operatorname{tg} \alpha + h \cos^2 2\alpha.$$

(A suivre.)

SUR UN PROBLÈME GRAPHIQUE

Par M. **Maurice d'Ocagne.**

Le problème que nous avons en vue est classique s'il en fut. C'est le suivant :

Mener par un point donné une droite qui passe par le point de rencontre inaccessible de deux droites données.

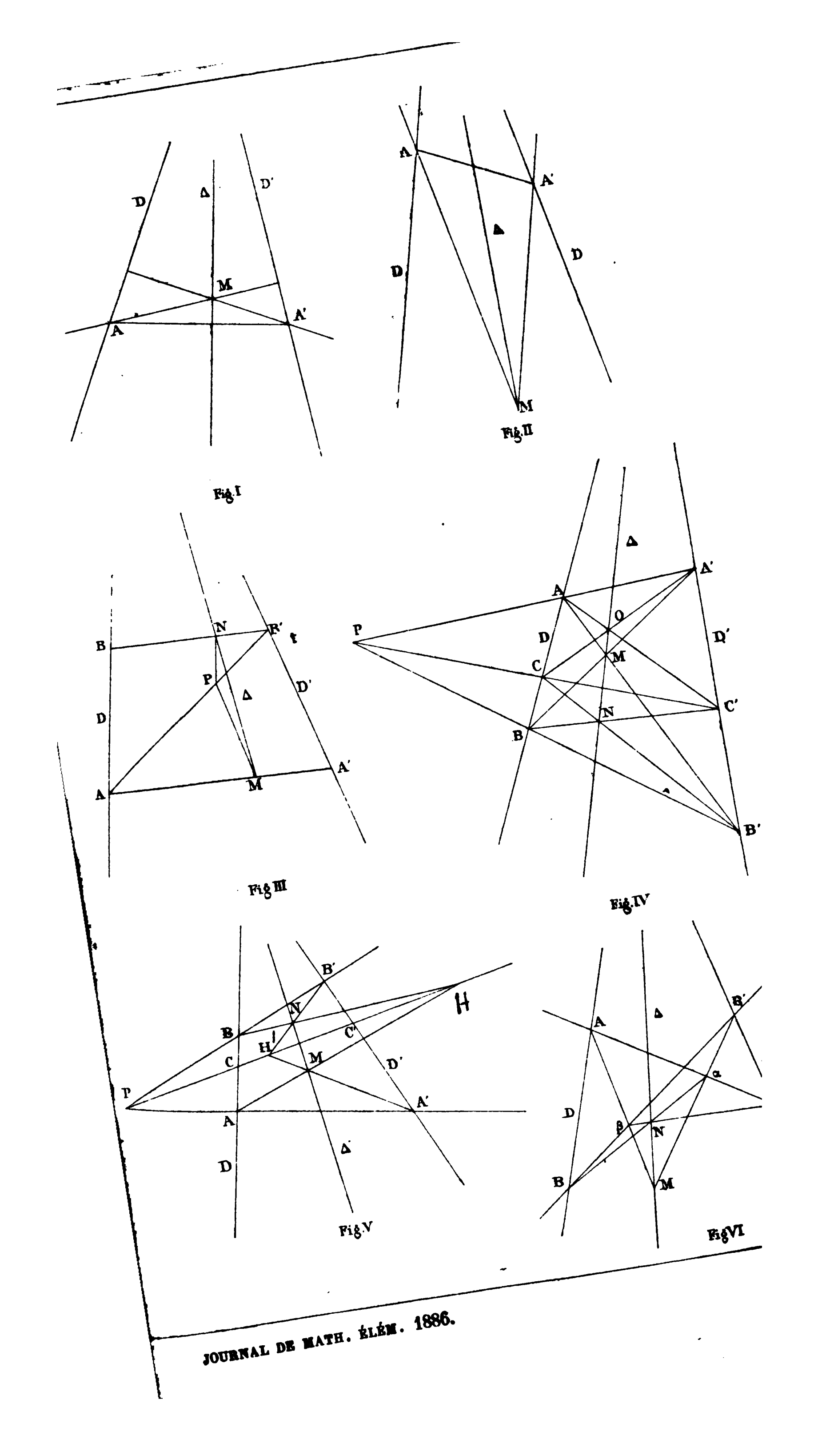
Ce problème se présente très fréquemment dans les épures. Il est bon de pouvoir le résoudre sans hésitation, chaque fois qu'il se présente. Or, les dispositions particulières de chaque épure rendent plus commode l'emploi de telle ou telle solution. Les lignes *déjà tracées sur l'épure, ou dont on aura besoin dans la suite*, peuvent, en effet, se prêter plus aisément, à la construction requise par telle solution qu'à celle exigée par telle autre.

Il est donc avantageux de se trouver en possession de plusieurs procédés, afin d'appliquer l'un ou l'autre suivant le cas. Cette observation justifiera peut-être la publication de cette note, extrêmement élémentaire. Il est bien évident que la plupart des procédés ici indiqués auront déjà été remarqués. Le sixième, pourtant, est peut-être nouveau, et son emploi semble devoir être presque toujours le plus commode; c'est un peu là ce qui nous a engagé à publier ces très simples remarques.

Dans tout ce qui suit, nous appelons M le point donné, D et D′ les droites données, Δ la droite cherchée.

Première solution. — Par le point M, mener des perpendiculaires aux droites D et D′ (*fig. 1*). La perpendiculaire à D coupe D′ en A′; la perpendiculaire à D′ coupe D en A; la droite Δ est la perpendiculaire abaissée de M sur AA′. Cela résulte immédiatement du théorème des trois hauteurs d'un triangle.

Cette solution, remarquablement simple en théorie, présente


D
Δ
D'
M
A
A'
Fig. I
A
A'
Δ
D
D
M
Fig. II
B
N
B'
P
D
Δ
D'
A
M
A'
Fig. III
Δ
A'
A
P
O
D
D'
M
C
N
C'
B
B'
Fig. IV
B'
N
H
B
C'
H'
C
M
D'
P
A
A'
Δ
D
Fig. V
A
Δ
B'
α
D
β
N
B
M
Fig. VI

l'inconvénient d'exiger en pratique l'emploi de l'équerre (*), puisqu'elle comporte le tracé de trois perpendiculaires. Nous préférons les solutions ou seule la règle intervient. On aura pourtant l'occasion d'appliquer cette solution dans le cas assez fréquent où les perpendiculaires menées de M à D et à D′ joueront un autre rôle dans l'épure et, par conséquent, devront être tracées.

DEUXIÈME SOLUTION. — Mener par M des parallèles à D et à D′ (*fig.* 2); la parallèle à D′ coupe D en A; la parallèle à D coupe D′ en A′. La droite Δ est la ligne qui joint le point M au milieu de AA′, d'après la propriété des diagonales du parallélogramme.

Ici encore l'équerre interviendra. Mais, comme précédemment, on peut avoir besoin des droites MA et MA′ pour l'épure elle-même.

TROISIÈME SOLUTION. — Par M, tirer une droite quelconque qui coupe D en A, D′ en A′ (*fig.* 3). Mener une parallèle quelconque BB′ à AA′, et joindre A à B′; mener enfin MP, parallèle à D′, jusqu'à la droite AB′, puis PN, parallèle à D′, jusqu'à la droite BB′. La droite Δ passe par le point N.

On a, en effet,

$$\frac{BN}{NB'} = \frac{AP}{PB'} = \frac{AM}{MA'},$$

ce qui prouve que MN passe par le point de rencontre de AB et A′B′.

Même observation que ci-dessus.

Dans les solutions suivantes, l'équerre n'intervient plus; l'emploi de la règle suffit: c'est un avantage incontestable.

QUATRIÈME SOLUTION. — Par le point M mener deux droites quelconques AB′ et BA′ (telles pourtant que le point de rencontre de AA′ et BB′ soit en dedans des limites de l'épure)

(*) Nous négligeons ici, comme dans tout ce qui suit, l'emploi du compas qui serait plus précis. Il est bien rare, en pratique, lorsqu'on a une équerre sous la main, que l'on se serve d'un compas pour mener des perpendiculaires ou des parallèles.

(*fig. 4*). Par le point de rencontre P des droites AA′ et BB′, tirer une autre droite quelconque CC′. Les droites BC′ et B′C d'une part, AC′ et A′C de l'autre, se coupent en N et en O sur la droite Δ. Ces deux points de rencontre N et O appartiennent, en effet, comme le point M, à la polaire du point P par rapport aux droites D et D′. polaire qui, passant par le point commun à D et à D′, n'est autre que la droite Δ.

Cinquième solution. — Par un point P, pris arbitrairement, mener trois droites quelconques (*fig. 5*) (*) qui coupent respectivement D en A, B, C et D′ en A′, B′, C′. Tirer MA et MA′ qui coupent CC′ en H et en H′. Tirer HB et H′B′ qui se coupent en N. Le point N appartient à la droite Δ; en effet, les triangles MAA′ et NBB′ sont homologiques, CC′ étant l'axe d'homologie. Donc, la droite qui joint les sommets correspondants M et N passe par le point commun aux droites AB et A′B′.

Sixième solution. — Voici enfin la solution que nous considérons comme la plus simple et la plus commode; elle n'exige que l'emploi de la règle; on n'a besoin, pour l'appliquer, que de tracer quatre droites. On peut, en effet, supposer qu'il existe toujours sur l'épure *deux droites quelconques* AA′ et BB′ (*fig. 6*) *coupant* D *et* D′. D'ailleurs, le tracé de ces deux *droites quelconques* ne peut être considéré comme une complication. Cela posé, on tire MA et MB′ qui coupent respectivement BB′ et AA′ en β et en α. Les droites Bα et A′β se coupent en N sur la droite Δ cherchée.

La démonstration est immédiate; l'hexagone BAβA′B′αB est inscrit dans la conique constituée par l'ensemble des droites AA′ et BB′; donc en vertu du théorème de Pascal, et numérotant respectivement 1, 2, 3, 4, 5, 6 les côtés BA, Aβ, βA′, A′B′, B′α, αB, on voit que le point M commun aux côtés 2 et 5, le point N commun aux côtés 3 et 6, et le point commun aux côtés 1 et 4 (droites D et D′) sont en ligne droite.

(*) Il arrivera souvent que l'épure contiendra déjà trois droites concourantes coupant D et D′.

Nous ferons observer, en terminant, que les solutions 1 et 2 ne peuvent donner qu'un point de la droite Δ, tandis que les quatre autres solutions en feraient connaître autant qu'on voudrait.

DIVERS THÉORÈMES

SUR LES PROPRIÉTÉS DE LA SOMME D'UN NOMBRE ET DE CE NOMBRE RENVERSÉ

Par M. **Emile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

Soient, dans le système de numération dont la base est x, A, B, C, etc., divers nombres (dont le premier chiffre à gauche n'est pas zéro, et nous ferons cette hypothèse dans tout notre travail). Soient a, b, c, etc., les nombres respectivement formés par les chiffres de A, de B, de C, etc., lus de droite à gauche; nous appellerons a, b, c, etc., nombres renversés de A, B, C, etc. (les premiers chiffres à gauche de a, b, c, etc., peuvent évidemment être nuls); soient N_a, N_b, N_c, etc. les nombres formés par les sommes $A + a$, $B + b$, $C + c$, etc.

Théorème I. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* $N_a = N_b$, A *et* B *ayant le même nombre de chiffres, est que la somme de deux chiffres à égale distance des extrêmes dans* A *soit égale à la somme des chiffres correspondants dans* B; *si* A *et* B *ont un nombre impair de chiffres, il faut de plus que le chiffre du milieu soit le même dans* A *et dans* B.

1° Le nombre des chiffres est pair : $2m$.

En appelant a_0, a_1, a_2, etc., les chiffres des unités, des x^m, des carrés des x^m, etc., dans A on a :

$$A = a_0 + x.\, a_1 + \ldots\, x^{m-1}.\, a_{m-1} + x^m.\, a_m + x^{m+1}\, a_{m+1} + \ldots .\, x^{2m-1}\, a_{2m-1},$$

$$a = a_{2m-} + x.\, a_{2m-2} + \ldots \qquad \ldots .\, x^{2m-1}\, a_0,$$

et par suite :

$$N_a = (a_0 + a_{2m-1})(1 + x^{2m-1}) + (a_1 + a_{2m-2})x(1 + x^{2m-3})$$
$$+ \dots (a_{m-1} + a_m) x^{m-1} (1 + x)$$

ou

$$N_a = \Sigma_{p=0}^{p=m-1} (a_p + a_{2m-p-1}) x^p (1 + x^{2m-2p-1});$$

de même

$$N_b = \Sigma_{p=0}^{p=m-1} (b_p + b_{2m-p-1}) x^p (1 + x^{2m-2p-1}).$$

Il est évident que si pour toutes les valeurs de p de 0 à $m - 1$

$$a_p + a_{2m-p-1} = b_p + b_{2m-p-1},$$

on aura

$$N_a = N_b;$$

la condition est donc suffisante.

Pour démontrer qu'elle est nécessaire, c'est-à-dire que (A et B étant deux nombres de $2m$ chiffres), si $N_a = N_b$, on a, pour toute valeur de p comprise de 0 à $m - 1$:

$$a_p + a_{2m-p-1} = b_p^1 + b_{2m-p-1}.$$

Nous poserons

$$a_p + a_{2m-p-1} - b_p - b_{2m-p-1} = k_p;$$

on aura alors

$$N_a - N_b = k_0 (1 + x^{2m-1}) + k_1 x (1 + x^{2m-1})$$
$$+ \dots k_{m-2} x^{m-2} (1 + x^3) + k_{m-1} x^{m-1} (1 + x),$$

ou, en désignant par k_j le premier des nombres k_p qui n'est pas nul :

$$N_a - N_b = x^j k_j (1 + x^{2m-2j-1}) + x^{j+1} k_{j+1} (1 + x^{2m-2j-3})$$
$$+ \dots x^{m-1} k_{m-1} (1 + x). \quad (1)$$

Si $N_a = N_b$, le second nombre est nul : donc k_j est un multiple de x; mais comme les nombres a_j, a_{2m-j-1}, b_j, b_{2m-j-1} qui entrent dans k_j sont des chiffres, c'est-à-dire sont plus plus petits que x, k_j ne peut, comme multiple de x, être que $+x$ ou $-x$.

Supposons d'abord $k_j = +x$;
divisons par x^j le 2me nombre de l'identité (1), elle devient

$$0 = k_j (1 + x^{2m-2j-1}) + x k_{j+1} (1 + x^{2m-2j-3})$$
$$+ \dots x^{m-j-1} k_{m-1} (1 + x);$$

puisque $k_j = x$ on a, en désignant par R l'ensemble des termes qui suivent le premier :

$$x(1 + x^{2m-2j-1}) + R = 0. \quad (2)$$

Or aucune des quantités k_{j+j1}, k_{j+2}, etc., ne peut être plus petite que $-2(x-1)$: on a donc, en valeur absolue,

$$R < x.\,2(x-1)(1+x^{2m-2j-1})+x^2.\,2(x-1)(1+x^{2m-2j-3}) + \dots x^{m-j-1}.\,2(x-1)(1+x),$$

ou, toutes réductions faites,

$$R < 2x(x^{2m-2j-2}-1).$$

Cette quantité est évidemment inférieure à $x(1+x^{2m-2j-1})$; donc l'identité (2) est impossible et k_j ne peut être égal à $+x$: un *même* raisonnement montre que k_j ne peut non plus être égal à $-x$.

Aucune des quantités k_0, k_1 ... k_{m-1} ne peut donc être la première qui ne soit pas nulle ; elles sont donc toutes nulles et le théorème est démontré, c'est-à-dire que la condition est nécessaire.

2° Le nombre de chiffres est impair: $2m+1$. Avec des notations analogues aux précédentes, en posant

$$a_p + a_{2m-p} - b_p - b_{2m-p} = k_p$$

pour toutes les valeurs de p comprises entre o et $m-1$ et

$$k_m = a_m - b_m,$$

on aura

$$N_a - N_b = k_0(1+x^{2m}) + k_1x(1+x^{2m-2}) + \dots k_{m-i}x^{m-1}(1+x^2) + k_mx^m(1+x^0).$$

Il est évident que si les valeurs de k_m, k_1, k_2 ... k_{m-1} sont nulles, on aura $N_a - N_b$, ce qui montre que la condition est suffisante.

Pour démontrer qu'elle est nécessaire, remarquons que k_m sera compris entre $-(x-1)$ et $+(x+1)$ et que k_0, k_1 ... k_{m-1} seront compris entre $-2(x-1)$ et $+2(x-1)$, et appelons k_j la première des quantités k qui ne soit pas nulle.

Si $N_a = N_b$, on aura comme précédemment

$$o = k_j(1+x^{2m-2j}) + k_{j+1}x(1+x^{2m-2j-2}) + \dots k_{m-1}x^{m-j-1} + 2k_mx^{m-j};$$

k_j doit donc encore être soit $+x$, soit $-x$.

Par conséquent si nous démontrons que, en valeur absolue, on a toujours

$$x(1+x^{2m-2j}) > 2(x-1)x(1+x^{2m-2j-2}) + \dots 2(x-1)x^{m-j-1}(1+x^2) + 2(x-1)x^{m-j},$$

il sera établi que l'identité $N_a = N_b$ ne peut avoir lieu que lorsque $k_0 = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, etc.

Or, toutes réductions faites, le second membre de l'inégalité précédente devient $2x(x^{2m-2j-1} - 1)$, ce qui est évidemment toujours inférieur à $x(1 + x^{2m-2j})$.

La condition est donc nécessaire. *(A suivre.)*

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. D'OCAGNE.

... J'ai, dans mon Mémoire *sur les transformations centrales des courbes planes (Mathesis,* 1884, pp. 73 et 97), donné une construction du centre de courbure dans l'hyperbole équilatère que je vais indiquer ici, en me reportant à la *fig. 60* (p. 29 du numéro de février) de votre Mémoire : *Si la perpendiculaire élevée en* O *au rayon vecteur* OM *coupe la normale* $M\omega$ *au point* N, *on a* $M\omega = NM$.

Ce qui fournit une construction bien simple du centre de courbure ω.

Rattacher l'une à l'autre nos deux constructions serait peut-être pour vos jeunes lecteurs le sujet d'un exercice assez intéressant...

QUESTIONS DIVERSES D'EXAMENS

(*Suite,* voir p. 16.)

3. — *Déterminer* a, b, c *de façon que le polynôme*

$$x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c,$$

soit divisible par

$$(x^2 - 1)(x + 3).$$

Le diviseur proposé étant du troisième degré, le quotient est un diviseur du premier degré de la forme $x + \lambda$. Écrivons donc

$$x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c \equiv (x^2 - 1)(x + 3)(x + \lambda).$$

En égalant, de part et d'autre, le terme en x^3 on trouve d'abord $\lambda = 2$ et l'on a

$$x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c \equiv (x^2 - 1)(x + 3)(x + 2).$$

On peut alors, pour déterminer les inconnues a, b, c, effectuer le calcul indiqué; ou bien, si l'on préfère, donner à x des valeurs particulières très simples : $0, +1, -1$, on trouve sans effort, par l'une ou l'autre de ces deux voies,

$$a = 5, \quad b = -5, \quad c = -6.$$

4. — *Lieu des points tels que la somme de leurs distances à un point fixe* O *et à une droite fixe* Δ *soit constante et égale à* h.

Le lieu est une parabole ayant pour foyer O et pour directrice une droite Δ′, parallèle à Δ, située à une distance h de Δ et dans la région à laquelle appartient le point O. On peut, à propos de cette question, chercher le lieu des points tels que la somme de leurs distances à un point et à une circonférence fixes soit constante; ce lieu est évidemment une ellipse.

5. — *Quelle est la progression arithmétique dans laquelle les sommes des* n *premiers termes est toujours égale à* $4n^2$?

C'est la progression

$$4, 12, 20, 28, \ldots$$

On la trouve en raisonnant ainsi. Soit S_n la somme des n premiers termes

$$u_1, u_2, \ldots u_n,$$

de la progression inconnue.

On a

$$S_n = 4n^2,$$

et par conséquent

$$S_{n-1} = 4(n-1)^2;$$

d'où

$$S_n - S_{n-1} = u_n = 4(2n - 1).$$

On observera que cette méthode s'applique à l'énoncé plus général dans lequel on propose de déterminer *une suite* sachant que la somme de ses n premiers termes est exprimée par

$$\alpha n^2 + \beta n,$$

α, β étant des constantes données.

6. — *En désignant par* p *et* q *deux entiers positifs, trouver pour* x = 1, *la valeur de l'expression*

$$\frac{px^{p+q} - (p+q)\,x^q + q}{(x-1)^2}.$$

Le numérateur s'annule pour $x = 1$; s'il n'est pas divisible par $(x-1)^2$, la valeur demandée est infinie. Mais, en effectuant la division, on trouve que le quotient est

$$px^{p+q-2} + 2px^{p+q-3} + 3px^{p+q-4} + \ldots + (q-1)px^p$$
$$+ qpx^{p-1} + q(p-1)x^{p-2} + \ldots + q.\,2x + q.\,1.$$

Pour $x = 1$, la valeur demandée est

$$p(1 + 2 + \ldots + q) + q(1 + 2 + \ldots + \overline{p-1}),$$

ou

$$\frac{pq(p+q)}{2}.$$

7. — *Étant données les sommes* S_1 *et* S_2 *des termes des deux progressions géométriques indéfiniment décroissantes*

$$S_1 = 1 + Q_1 + Q_1^2 + \ldots$$
$$S_2 = 1 + Q_2 + Q_2^2 + \ldots$$

trouver la somme $S_{1,2}$ *des termes de la progression géométrique*

$$S_{1,2} = 1 + Q_1Q_2 + Q_1^2Q_2^2 + \ldots$$

Les formules connues

$$S_1 = \frac{1}{1-Q_1}, \quad S_2 = \frac{1}{1-Q_2}, \quad S_{1,2} = \frac{1}{1-Q_1Q_2},$$

donnent immédiatement

$$1 - \frac{1}{S_{1,2}} = \left(1 - \frac{1}{S_1}\right)\left(1 - \frac{1}{S_2}\right).$$

Plus généralement, si l'on considère h progressions géométriques indéfiniment décroissantes

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots S_h,$$

on a

$$1 - \frac{1}{S_{1,2\ldots h}} = \left(1 - \frac{1}{S_1}\right)\left(1 - \frac{1}{S_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{S_h}\right).$$

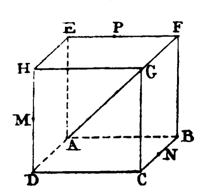
(A suivre.)

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (1885)

EXAMENS ÉCRITS (*).

Géométrie descriptive.

On donne dans le premier dièdre : un point A dont la cote $\alpha a'$ est de 19^{mm}, l'éloignement $\alpha a = 22^{mm}$; un point G dont la côte $\gamma g' = 53^{mm}$, l'éloignement $\gamma g = 48^{mm}$, et dont la distance au plan de profil de A vers la droite est de 52^{mm}. La droite AG est une diagonale du parallélipipède rectangle dont une face est horizontale; une autre, parallèle au plan vertical; trouver : 1° les projections du parallélipipède; 2° celles de la sphère qui lui est circonscrite. — Par les milieux M, N, P des trois arêtes DH, BC, EF on fait passer un plan; trouver les intersections de ce plan avec le parallélipipède, avec la sphère et les vraies grandeurs de ces sections. — Pour la mise à l'encre, on supprimera la portion de la sphère située au-dessus du plan sécant; et la portion du parallélipipède située au-dessous. (12 juin — 1 h. 1/2 à 4 h.)



Lavis.

Laver soit à teintes plates superposées, soit à teintes fondues, la projection horizontale d'un tronc de cône de révolution plein reposant par une base sur le plan horizontal.

Les dimensions sont : rayon de la base inférieure 8^{cm}, rayon de la base supérieure 3^{cm}. Les rayons lumineux sont parallèles à une droite dont les projections font des angles de 45° avec la partie gauche de la ligne de terre. (13 juin — 1 h. 1/2 à 4 h. 1/2.)

CONCOURS GÉNÉRAUX (**)

CLASSE DE PHILOSOPHIE (PARIS)

Mathématiques.

On donne un cercle O et un point G intérieur à ce cercle. 1° Démontrer qu'il existe une infinité de triangles ABC inscrits dans ce cercle et tels que les médianes de chacun d'eux se coupent en G. 2° Trouver le lieu géométrique des milieux des côtés des triangles ABC. 3° Examiner si, pour toutes les positions de G, on peut prendre un point quelconque de la circonférence O

(*) Voyez pour les autres questions *Journal* 1885, p. 184.

(**) Ces énoncés nous ont été communiqués par M. Bordage, professeur au collège de Nantua.

comme sommet d'un des triangles ABC. Quand il en est autrement, déterminer l'arc du cercle O sur lequel sont alors situés les sommets des triangles ABC. 4° Démontrer que la somme des carrés des côtés des triangles ABC a une valeur constante.

TROISIÈME (PARIS)

I. — On donne sur une circonférence deux points fixes A et B que l'on joint à un point quelconque M de la circonférence et du centre on mène sur MB la perpendiculaire OK, qui, par sa rencontre avec MA, forme le triangle MKP. On propose de déterminer les lieux géométriques que décrivent: 1° le point de rencontre des médianes; 2° le point de rencontre des bissectrices; 3° le point de concours des hauteurs; 4° le centre du cercle circonscrit du triangle MKP, lorsque M se déplace sur la circonférence O.

II. — On trace deux cercles ayant pour rayon 2 décimètres et dont les centres O et O′ sont distants de 2 décimètres, et on demande de calculer la surface de la partie OAO′B commune à ces deux cercles.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES

CERTIFICAT D'APTITUDE

Mathématiques.

Une sphère de rayon R et un cône droit dont le rayon de base = R et la hauteur 2R, sont posés sur un plan P, le cône reposant sur sa base; on coupe les deux solides par un plan Q parallèle au plan P, situé à une distance x du plan P. — 1° Déterminer x de façon que les sections faites par le plan Q dans les deux solides aient la même surface. 2° Déterminer x de façon que le volume du tronc de cône compris entre les plans P et Q soit égal à n fois le volume du segment sphérique compris entre ces mêmes plans. — Pour quelles valeurs de n le problème est-il possible?

AGRÉGATION

1° Mesure du parallélipipède.

2° D'un point P pris sur le prolongement du diamètre AB d'une demi-circonférence de rayon R, on lui mène une tangente PC et l'on fait tourner la figure autour de la droite ABP. La droite PC engendre l'aire latérale d'un cône et l'arc BC engendre une zone. On demande à quelle distance de O il faut prendre le point P pour que le rapport de l'aire latérale du cône à l'aire de la zone soit égal à un nombre donné m. Le problème est-il toujours possible, quelle que soit la valeur attribuée à m?

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

Juillet 1885.

1° — Établir la relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
2° — Calculer, en fonction de $\sin 2x$ les expressions

$$\sin x + \cos x, \quad \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}, \quad \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3° — Trouver les maxima ou les minima de ces expressions quand x reste compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$.

Novembre 1885.

Résoudre un triangle, connaissant deux côtés ainsi que la somme, ou la différence, des cosinus des angles opposés à ces côtés.

ACADÉMIE D'ALGER

6 juillet 1885.

Un triangle équilatéral ABC, de $5^m 82564$ de côté, tourne autour d'une droite AX, située dans son plan, passant par son sommet A et faisant avec AC un angle de 30°. Calculer la surface engendrée par son périmètre et le volume engendré par son aire.

— On donne une circonférence et un angle au centre et on demande de mener entre les côtés de cet angle une tangente de longueur minimum. Déterminer le point de contact.

— Abaisser une perpendiculaire d'un point donné sur une droite donnée. Construction et théorie.

ACADÉMIE DE BESANÇON

20 juillet 1885.

On donne un rectangle ABCD dont les dimensions sont $AB = a$, $BC = b$. On prend sur DC et sur le prolongement de BC deux longueurs égales DE, CF que l'on désigne par x. Déterminer x de façon que le volume engendré par le quadrilatère AEFB tournant autour de AB soit égal au volume engendré par le rectangle ABCD tournant aussi autour de AB. Conditions de possibilité du problème. Peut-on interpréter les solutions négatives ?

21 juillet 1885.

On donne une droite AB et deux points A et B sur cette droite. En ces points on élève à la droite les perpendiculaires AA' et BB'. On prend un troisième point O, sur AB entre A et B. Ce point O est le sommet d'un angle droit qui tourne autour de ce point comme pivot. Les côtés de cet angle coupent AA' et BB' en M et P. On demande d'étudier la variation de la somme

AM + BP; de trouver son minimum et de calculer par les tables de logarithmes l'angle φ que forment les droites OP et AB dans la position qui répond au minimum. On prendra pour le calcul OA $= 1295^m$, OB $= 845^m$.

22 juillet 1885.

I. — Transformer l'expression

$$\sqrt{x^2 + x + 1 - \sqrt{2x^3 + x^2 + 2x}}$$

en une autre qui ne contienne que deux radicaux simples.

II. — Soit un rectangle ABCD. Sur DC comme diamètre on décrit le demi-cercle DEC à l'extérieur du rectangle. On considère la figure limitée par le demi-cercle et les trois côtés DA, AB, BC du rectangle. Déterminer AB $= x$, BC $= y$ de facon que le périmètre de la figure considérée soit égal à p et sa surface égale à k^2. Conditions de possibilité. Distinction des cas où il y a une ou deux solutions. Quelle relation faut-il établir entre p et k pour que le rectangle se réduise à un carré ?

23 juillet 1885.

On donne une droite D et deux points P et Q; par la droite et ces deux points on fait passer deux plans qui forment un dièdre dont on demande les plans bissecteurs. *Données :* les points P et Q sont sur la ligne de terre, $Pa' = 1$, $a'b = 5$, $bQ = 1$, $aa' = 4$, $bb' = 4$.

24 juillet 1885.

Sur une droite AB de longueur a on prend un point M à la distance AM $= x$. On construit avec AM le triangle équilatéral AMN, puis on élève en N la perpendiculaire NP sur MN et en B la perpendiculaire BP sur AB. Calculer la surface du quadrilatère ANPB. Cette surface passe-t-elle par un maximum ou par un minimum quand M se déplace entre A et B?

25 juillet 1885.

Couper une sphère de rayon a par deux plans parallèles de façon que l'aire de la zone correspondante ait une valeur donnée, représentée par $2\pi ab$ et que le volume du segment sphérique compris entre ces deux plans parallèles soit maximum.

QUESTION 101 (*)

Solution géométrique par M. A. Fitz-Patrick, élève de mathématiques élémentaires au Lycée de Poitiers.

Sur la bissectrice de l'angle droit d'un triangle ABC *rectangle en* A, *on prend un point* M; *soient* D *le point où la bissectrice rencontre l'hypoténuse,* P *la projection de* M *sur le côté* AC. *Déterminer le point* M *de façon que les aires des triangles* BMD *et* MPC *aient une somme donnée.*

(*) Voyez une solution algébrique (*Journal*, p. 44).

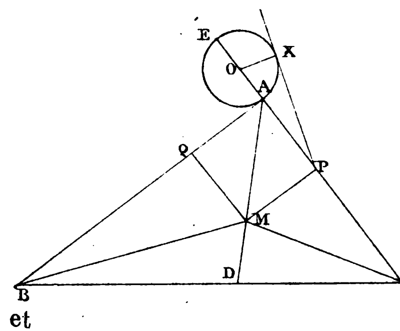
On doit avoir

$$MBD + MPC = S,$$

ou en observant que

$$MBD = ABD - ABM,$$

$$ABD - ABM + MPC = S;$$



ce qui peut s'écrire

$$ABM - MPC = ABD - S = m^2,$$

puisque le triangle ABD est connu.

Or

$$ABM = \frac{1}{2} AB \times MQ = \frac{1}{2} AB \times AP,$$

et

$$MPC = \frac{1}{2} PC \times MP = \frac{1}{2} PC \times AP;$$

donc

$$AB \times AP - PC \times AP = 2m^2,$$

ou

$$AP(AB - PC) = 2m^2.$$

Mais

$$PC = AC - AP;$$

d'où, en substituant dans l'égalité précédente,

$$AP\,(AB - AC + AP) = 2m^2.$$

On est donc ramené à construire deux lignes connaissant la somme et le produit de leurs mesures.

La longueur OP une fois déterminée, on aura facilement le point P et enfin le point M cherché.

QUESTION 141

Solution par M. Lucien Lévy.

Construire un triangle sachant que la bissectrice coupe deux circonférences données sous des angles donnés et que les sommets opposés sont (*) les centres des deux circonférences.

(*) L'énoncé renfermait une erreur qui se trouve ici rectifiée et que M. Fitz-Patrick nous a signalée.

Menons une corde CD faisant avec la première circonférence O le premier angle donné α, c'est-à-dire faisant avec la tangente, à son extrémité C, l'angle α. Puis décrivons une circonférence concentrique à la première et touchant la corde CD. La bissectrice du triangle à construire sera évidemment tangente à cette circonférence. Elle sera, de même, tangente à une seconde circonférence de centre O′ et construite d'une manière analogue: elle sera donc une tangente commune à deux circonférences connues. Le sommet du triangle se trouvera à l'intersection de cette tangente avec la droite qui joint le centre O d'une circonférence au symétrique du centre O′ de l'autre circonférence par rapport à cette tangente.

Discussion. — La bissectrice pouvant être extérieure ou intérieure, la discussion est ramenée à celle des tangentes communes à deux circonférences. La seule circonstance spéciale au problème actuel est que, dans le cas des circonférences égales aux deux tangentes communes intérieures, ne correspond aucune solution.

Nota. — Autres solutions par MM. Bordage, professeur au collège de Nantua; Vigarié, élève externe à l'École des mines; Huré (Jules), du collège de Montargis; Fitz-Patrick, élève au lycée de Poitiers.

QUESTIONS PROPOSÉES

206. — Démontrer que si les côtés b, c d'un triangle et l'angle compris A, vérifient la relation

$$b = 4c \cos\left(30^\circ + \frac{A}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{A}{2}\right):$$

1° l'angle A est le double de C; 2° les côtés a, b, c vérifient l'égalité

$$a^2 = c(b + c);$$

on pourra déduire (par des considérations géométriques) cette seconde propriété de la précédente.

(G. L.)

207. — Résoudre les équations

$$a(xy + yz + zx) = xyz,$$
$$y^2x^2 + z^2y^2 + x^2z^2 = 2xyz\,(x + y + z),$$
$$a(x + y + z)^2 = 4xyz.$$

On vérifiera qu'elles admettent *six* solutions et que ces solutions sont réelles. *(G. L.)*

208. — Soient deux cercles Δ, Δ′ tangents au point M; par M, on mène une transversale mobile qui coupe Δ en A et Δ′ en B. La perpendiculaire élevée à AB au point B et la tangente à Δ en A se coupent en C; si du point C on abaisse une perpendiculaire sur la ligne des centres, on obtient une droite qui rencontre AB en I.

Le lieu du point I est une circonférence. *(G. L.)*

209. — On considère deux droites parallèles Δ, Δ′ et un point fixe O. Par O, on trace une droite qui rencontre Δ en A, Δ′ en A′. On élève alors au point A′ une perpendiculaire à AA′ et l'on prend sur cette perpendiculaire A′I = OA.

Démontrer que le lieu du point I est un système de deux droites, quand on fait tourner OAA′ autour du point O.

On suppose, bien entendu, que la longueur OA est portée sur la perpendiculaire dont il est question ci-dessus, dans les deux sens. *(G. L.)*

Nota. — La question 167 dont nous avons publié une solution (p. 46), a été également résolue par MM. Bourdier, du Lycée de Grenoble, et Henri Martin, du Lycée Condorcet.

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 3990 6.

PROBLÈME DE MÉCANIQUE

Par M. **Éd. Guillet,** professeur au Lycée d'Avignon.

(*Suite*, voir p. 49.)

Etude du deuxième bond. — En appelant, comme nous l'avons fait, v_1 la vitesse en B′ et α' l'angle de la normale B′N′ avec la direction de la vitesse v_1 après le choc en B′, les calculs et les raisonnements seront identiques à ceux que nous avons faits pour étudier la trajectoire parabolique BSB′.

Prenons pour nouveaux axes de coordonnées O′X et O′B′; nous aurons

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_1 \sin(\alpha + \alpha') \\ v_y &= v_1 \cos(\alpha + \alpha') - gt \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= v_1 t \sin(\alpha + \alpha') \\ y &= v_1 t \cos(\alpha + \alpha') - \frac{1}{2} gt^2 + (a - x_1) \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

En désignant par h' la hauteur de chute capable de donner à la sphère la vitesse v_1, on a

$$h' = \frac{v_1^2}{2g}$$

ou

$$h' = \frac{v_0^2}{2g}(1 + 8 \sin^2 \alpha),$$

c'est-à-dire

$$h' = h(1 + 8 \sin^2 \alpha). \qquad (24)$$

Eliminant t entre les équations (23) on aura la relation qui lie les coordonnées d'un point quelconque de la deuxième courbe B′S′B″ :

$$y = x \operatorname{cotg}(\alpha + \alpha') - \frac{gx^2}{2v_1^2 \sin^2(\alpha + \alpha')} + (a - x_1) \operatorname{tg} \alpha. \quad (25)$$

Si nous appelons x_2 et y_2 les coordonnées du point B″ où la deuxième trajectoire rencontre la droite BX, nous

avons

$$y_2 = x_2 \operatorname{cotg}(\alpha + \alpha') - \frac{gx^2}{2v_1^2 \sin^2(\alpha + \alpha')} + (a - x_1)\operatorname{tg}\alpha. \quad (26)$$

D'autre part, les triangles semblables OBX et O″B″X donnent

$$\frac{y_2}{a \operatorname{tg}\alpha} = \frac{a - x_2 - x_1}{a},$$

d'où

$$y_2 = (a - x_1 - x_2)\operatorname{tg}\alpha. \quad (27)$$

Portant cette valeur de y_2 dans l'équation (26), on a

$$-x_2 \operatorname{tg}\alpha = x_2 \operatorname{cotg}(\alpha + \alpha') - \frac{gx_2^2}{2v_1^2 \sin^2(\alpha + \alpha')};$$

ou, en simplifiant et en faisant disparaître la solution $x_2 = 0$, qui correspond au point de départ B′:

$$x_2 = \frac{2v_1^2}{g} \sin^2(\alpha + \alpha')\,[\operatorname{cotg}(\alpha + \alpha') + \operatorname{tg}\alpha].$$

Or

$$\operatorname{cotg}(\alpha + \alpha') + \operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')\cos\alpha};$$

de sorte qu'il vient

$$x_2 = \frac{2v_1^2}{g} \times \frac{\sin(\alpha + \alpha')\cos\alpha'}{\cos\alpha}$$

et enfin

$$x_2 = 4h' \sin(\alpha + \alpha') . \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}. \quad (28)$$

D'ailleurs

$$\sin(\alpha + \alpha')\cos\alpha' = \sin\alpha\cos^2\alpha' + \cos\alpha\sin\alpha'\cos\alpha;$$

Et de la relation

$$\operatorname{tg}\alpha' = 3\operatorname{tg}\alpha$$

on déduit :

$$\sin\alpha' = \frac{3\sin\alpha}{\sqrt{1 + 8\sin^2\alpha}},$$

$$\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 + 8\sin^2\alpha}}.$$

On peut donc éc ire

$$x_2 = \frac{16h' \sin\alpha\cos\alpha}{1 + 8\sin^2\alpha}$$

et, si l'on tient compte de la relation (24), on a

$$x_2 = 16h \sin \alpha \cos \alpha \tag{29}$$

ou

$$x_2 = 8h \sin 2\alpha \tag{30}$$

REMARQUE. — La comparaison des formules (30) et (11) montre que

$$x_2 = 2x_1. \tag{31}$$

DURÉE DU DEUXIÈME BOND. — Si nous appelons t_2 la durée du deuxième bond, le chemin horizontal parcouru étant x_2, on calculera t_2 à l'aide de la formule

$$x = v_1 t \sin (\alpha + \alpha'),$$

dans laquelle on remplacera t par t_2 et x par x_2. On en déduit

$$t_2 = \frac{x_2}{v_1 \sin (\alpha + \alpha')}.$$

Or

$$\sin (\alpha + \alpha') = \sin \alpha \cos \alpha' + \sin \alpha' \cos \alpha,$$

c'est-à-dire

$$\sin (\alpha + \alpha') = \frac{4 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{1 + 8 \sin^2 \alpha}}.$$

On aura donc, en remplaçant x_2, v_1, et $\sin (\alpha + \alpha')$ par leurs valeurs, en fonction des données :

$$t_2 = \frac{4h}{v_0},$$

et puisque

$$h = \frac{v_0^2}{2g},$$

il vient

$$t_2 = \frac{2v_0}{g}. \tag{32}$$

REMARQUE. — Si nous comparons les formules (32) et (13), nous voyons que

$$t_2 = t_1,$$

c'est-à-dire que le deuxième bond est effectué dans le même temps que le premier.

AMPLITUDE DU DEUXIÈME BOND. — Le trapèze rectangle O'B'B''O''

donne

$$B'B'' = \frac{x^2}{\cos \alpha}.$$

On a donc, en désignant par A′ l'amplitude du deuxième bond,

$$A' = \frac{16h \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha}$$

ou

$$A' = 16h \sin \alpha. \qquad (33)$$

Remarque. — La comparaison des formules (33) et (14) montre que

$$A' = 2A, \qquad (34)$$

c'est-à-dire que la deuxième amplitude est double de la première, comme le prouvait d'ailleurs l'égalité

$$x_2 = 2x_1,$$

puisqu'on a

$$\frac{x_1}{A} = \frac{x_2}{A'} = \cos \alpha.$$

(A suivre.)

DIVERS THÉORÈMES

SUR LES PROPRIÉTÉS DE LA SOMME D'UN NOMBRE ET DE CE NOMBRE RENVERSÉ

Par M. **Emile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite et fin*, voir p. 60.)

Problème I. — A *étant un nombre de* n *chiffres écrit dans le système dont la base est* x, *trouver combien la somme* A + a = N_a *peut avoir de valeurs différentes lorsque* A *varie de* x^{n-1} *à* $x^n - 1$.

$$N_a = (a_0 + a_{n-1})(1 + x^{n-1}) + (a_1 + a_{n-2})\, x\, (1 + x^{n-2}) + \ldots \qquad (3)$$

Si n est pair $= 2m$, il y aura évidemment m termes dans le second membre.

Si n est impair $= 2m + 1$, il y en aura $m + 1$ à cause du terme $2a^m x^m$.

Pour avoir toutes les valeurs possibles de N_a il suffira de donner dans (3) aux coefficients toutes les valeurs dont ils sont susceptibles et de les combiner de toutes les manières possibles : car chaque combinaison différente donnera une valeur différente pour N_a d'après le théorème précédemment établi ; or

$a_0 + a_{n-1}$ peut prendre les $2(x - 1)$ valeurs $1, 2, \ldots 2(x - 1)$.

$a_1 + a_{n-2}$, $a_2 + a_{n-3}$, etc., peuvent prendre les $2(x - 1) + 1$ valeurs $0, 1, 2, \ldots 2(x - 1)$.

Si $n = 2_{m+1}$, le chiffre a_m ne pourra avoir que les x valeurs $0, 1, 2 \ldots (x - 1)$; le problème a donc sa solution dans le théorème suivant.

Théorème II. — *Le nombre total des valeurs différentes que peut prendre* N_a, A *ayant* n *chiffres, est*

$$2(x - 1)(2x - 1)^{m-1} \textit{ si } n = 2m$$

ou

$$2x(x - 1 (2x - 1)^{m-1} \textit{ si } n = 2m + 1.$$

Remarque I. — Si n est pair, N_a est toujours divisible par $x + 1$.

Remarque II. — Le théorème II a lieu quelle que soit la base x, même pour $x = 2$.

Parmi les nombres écrits dans une même base il en est pour lesquels $A = a$; il faut et il suffit pour cela que les chiffres à égale distance des extrêmes dans A soient égaux deux à deux ; appelons de tels nombres, nombres *symétriques*.

Problème II. — *Combien y a-t-il de nombres symétriques parmi les nombres de* n *chiffres ?*

1° $n = 2m$.

Les chiffres de A sont :

$$a_0, a_1 \ldots a_{m-1}, a_{m-1} \ldots a_1, a_0.$$

a_0 ne peut avoir que les $x - 1$ valeurs $1, 2, 3 \ldots (x - 1)$, tous les autres peuvent avoir les x valeurs $0, 1, 2, 3 \ldots (x - 1)$.

Il y aura donc autant de valeurs différentes pour A qu'il y aura de nombres de m chiffres (tous les chiffres pouvant être nuls sauf le premier), c'est-à-dire

$$x^{m-1}(x - 1)$$

2° $n = 2m + 1$.

Les chiffres de A sont :

$$a_0, a_1 \dots a_{m-1}, a_m, a_{m-1}, \dots a_1, a_0.$$

a_0 ne peut avoir que les $x - 1$ valeurs $1, 2, 3, \dots (x - 1)$, tous les autres peuvent avoir les x valeurs $0, 1, 2, 3, \dots (x - 1)$.

Comme a_m peut avoir x valeurs, le nombre de nombres symétriques de $2m + 1$ chiffre est donc x fois le nombre de nombres de m chiffres (tous les chiffres pouvant être nuls sauf le premier), c'est-à-dire d'après ce qui précède

$$x \,.\, x^{m-1}(x - 1) \quad \text{ou} \quad (x - 1)x^m.$$

Ainsi, dans le cas de n pair il y a

$$(x - 1)x^{\frac{n-2}{2}} \text{ nombres symétriques de } n \text{ chiffres.}$$

Dans le cas de n impair il y a

$$(x - 1)x^{\frac{n-1}{1}} \text{ nombres symétriques de } n \text{ chiffres.}$$

Problème III. — *Trouver combien il y a de nombres symétriques entre* 1 *et* x^n.

En cherchant combien il y a de nombres symétriques de un chiffre, de deux chiffres, etc., de n chiffres et faisant la somme des résultats trouvés, l'application des formules précédentes donne pour ce nombre

$$2(x^m - 1), \quad \text{si } n = 2m$$

et

$$x^m + x^{m-1} - 2, \quad \text{si } n = 2m - 1.$$

Remarque III. — Si au lieu de considérer la somme $A + a$ nous considérons la différence $A - a$, nous pouvons faire une étude tout à fait analogue qui se déduira du théorème suivant.

Théorème III. — *Si* A *et* B *ont le même nombre de chiffres et que la différence de deux chiffres à égale distance des extrêmes dans* A *soit égale à la différence des chiffres correspondants dans* B, *on aura* $A - a = B - b$, *et réciproque-*

ment; si A *et* B *ont un nombre impair de chiffres, il faut de plus que le chiffre du milieu soit le même dans* A *et dans* B.

Remarques dans le système de numération dont la base est dix.

I. La plus petite solution de l'équation indéterminée

$$A + a = H^2 \text{ est } A = 29.$$

II. — La plus petite solution de l'équation indéterminée

$$A - a = H^2 \text{ est } A = 10.$$

III. — L'on établit assez vite par une vérification raisonnée que pour aucun nombre A de deux chiffres l'on a

$$A^2 + a^2 = H^2$$

et que 65 est le seul nombre de deux chiffres tel que

$$A^2 - a^2 = H^2.$$

On a en effet

$$65^2 - \overline{56}^2 = \overline{33}^2.$$

Les problèmes généraux d'où proviennent ces remarques ne paraissent pas d'une solution facile.

L'OMNIFORMULE DE CUBATURE

Par M. **Casimir Rey.**

1. — L'évaluation des formules usuelles est si nécessaire, que les géomètres ont multiplié avec raison les procédés fournissant le plus rapidement les cubatures fondamentales. Mais on est surpris de trouver encore dans les ouvrages classiques (*) tous ces procédés isolés les uns des autres, sans lien apparent, quand ils se condensent en deux formules bien simples qui sont :

1° *L'omniformule de cubature* (voir note V, § 82);

2° *La formule dite de Guldin.*

Il nous semble que cette condensation généraliserait les idées, régulariserait et diminuerait les efforts de mémoire.

(*) Dans une thèse présentée à la Faculté de Paris (*Des Quadratures*, juillet 1868), M. Pujet, après avoir établi le théorème suivant : *Le volume du solide compris entre deux plans parallèles et une surface réglée quelconque est*

2. — Définition de l'omniformule (voir note V, § 32). — Un volume quelconque V peut être considéré comme limité par deux plans parallèles y déterminant des bases B, *b* différentes de zéro *ou nulles* et par une surface latérale passant par le périmètre des bases.

Soit *h* la distance des bases, B′ la section faite dans le volume par un plan équidistant de ces bases; dans les cas les plus usuels, la mesure du volume est donnée par la formule

$$V = \frac{h}{6}(B + b + 4B'),$$

que nous proposons de nommer *l'omniformule*, à cause du grand nombre de ses applications.

3. — Nous supposons démontrées les formules classiques servant à évaluer le volume du *prisme* et celui de la *pyramide*.

4. Lemme. — Soit : la pyramide quadrangulaire S AC A′C′ à base trapézoïdale AC C′A′ ; A″C″ la parallèle équidistante de AC et A′C′; C′D la distance de C′ à la section triangulaire SA″C″.

Le triangle A″C″C′ est le quart du trapèze ACC′A′; donc la pyramide SA″C″C′ est le quart de la pyramide SACC′A′.

Or la pyramide SA″C″C′ a pour mesure

$$S\,A''C'' \times \frac{C'D}{3};$$

égal à la somme des volumes des trois cônes ayant pour hauteur commune la demi-distance des bases parallèles, et pour bases respectives : l'un, la base inférieure; l'autre, la base supérieure; et le troisième, quatre fois la section moyenne, théorème qui est la traduction de ce que M. Rey appelle, dans la présente note, l'*omniformule*, dit (p. 55) :

« Cette démonstration tout élémentaire d'un théorème très général pourrait être introduite dans l'enseignement, et l'on en déduirait très aisément les expressions connues du volume du tronc de pyramide et du volume du tronc de prisme, ainsi que le cubage des mètres de pierre, fossés ou tombereaux. On pourrait également l'appliquer au cubage des troncs d'arbres et des tonneaux. »

Enfin M. Pujet, dans la thèse citée, l'applique au volume du segment sphérique.

Le vœu qu'exprime ici M. Rey a donc été formulé déjà très explicitement, y a une vingtaine d'années; l'omniformule est aujourd'hui très connue (voyez : Rouché et de Comberousse. *Traité de Géométrie*, 4ᵉ édition, § 656 ; Vacquant, *Cours de Géométrie élémentaire*, § 659. Voyez aussi les traités de tachymétrie où la formule en question se nomme *règle des trois niveaux ;* expression plus imagée et qui nous paraît préférable) et on l'enseigne dans la plupart des cours. Il lui reste, il est vrai, à pénétrer dans les programmes. G. L.

donc la pyramide SACC'A' a pour mesure

$$4SA''C'' \times \frac{C'D}{3}.$$

Remarques. — Si A' coïncide avec C', le lemme continue à être vrai.

— Les distances de A, C, A' à SA''C'' sont égales à C'D.

5. Théorème fondamental. — *L'omniformule est vraie pour tout volume* V *à bases parallèles et à faces trapézoïdales ou triangulaires.*

Soit V le volume ACDFA'C'E'F'; A''C''D''E''F'' la section B' équidistante des bases B, b; OO' la hauteur h divisée en deux parties égales par le point S de la section B'.

Les triangles (non tracés pour ne pas surcharger la figure) SAC, SCD, SDF, SFA et SA'C', SC'E', SE'F', SF'A' décomposent le volume en :

1° Une pyramide SACDF de base B, de hauteur SO $= \frac{h}{2}$, qui a pour mesure

$$\frac{h}{6} \times B;$$

2° Une pyramide SA'C'E'F' de base b, de hauteur SO' $= \frac{h}{2}$, qui a pour mesure

$$\frac{h}{6} \times b;$$

3° Des pyramides SACC'A', SCDC', SC'DE', SE'DFF', SFF'AA', dont, en vertu du lemme précédent, la somme a pour mesure

$$4\frac{h}{6}\,(SA''C'' + SC''D'' + SD''E'' + SE''F'' + SF''A'' = B',$$

car les distances des points C', D, F à la section B' sont égales à $\frac{h}{2}$.

On en conclut

$$V = \frac{h}{6}\,(B + b + 4B').$$

Remarque. — Si b était nulle, le théorème ne cesserait pas d'être vrai.

6. Corollaires. — Du théorème précédent il résulte que l'omniformule est vraie pour

1° Le prisme;

2° La pyramide;

3° Le tronc de prisme triangulaire considéré comme couché sur une de ses faces trapézoïdales lui servant de base B;

4° Le tronc du parallélépipède considéré comme couché sur une de ses faces trapézoïdales lui servant de base B.

5° Le tronc de pyramide à bases parallèles;

6° Les volumes à bases rectangulaires et à faces latérales trapézoïdales dont le tas de cailloux, les charrettes, les brouettes, les obélisques, etc., présentent des applications.

7° Les volumes des terrasses ou plates-formes avec leurs talus descendants, des fossés avec leurs talus montants, etc.

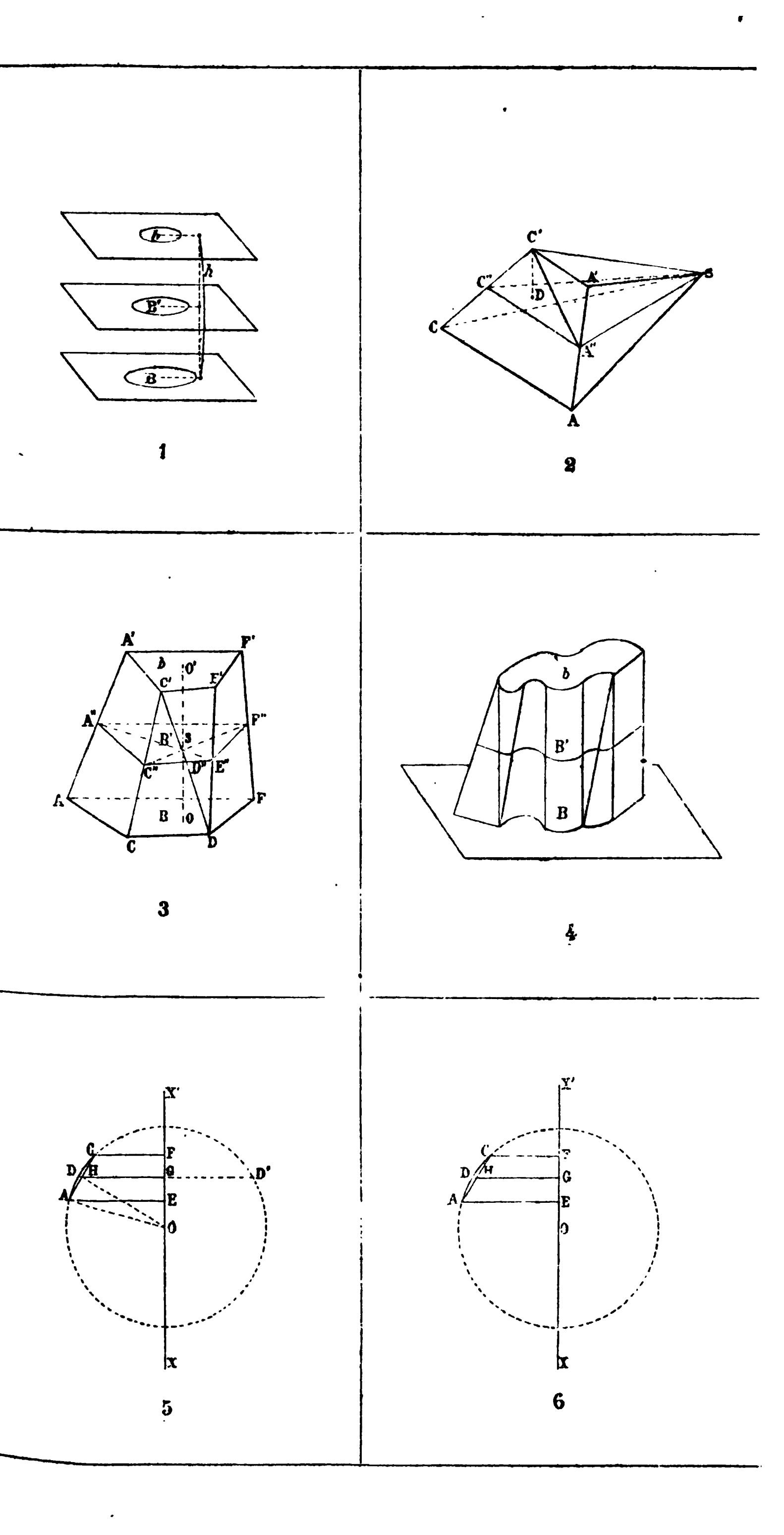
A l'évaluation des volumes des deux dernières catégories exactement donnée par l'omniformule, on applique souvent la formule du tronc de pyramide, *bien à tort*, puisque les arêtes latérales ne concourent pas.

7. Formules classiques. — Les formules classiques relatives à l'évaluation du tronc de prisme triangulaire, du tronc de parallélépipède, du tronc de pyramide à bases parallèles se déduisent aisément de l'omniformule.

Afin de ne pas allonger notre article outre mesure, nous laissons au lecteur le soin d'en faire la vérification. Ces formules classiques sont évidemment préférables à l'omniformule : car, dans les applications, elles présentent moins de données à mesurer directement.

8. Cylindres, cônes, troncs de cône à bases parallèles dont les bases sont quelconques. — L'omniformule leur est applicable, car ils sont les limites de prismes, de pyramides, de troncs de pyramide à bases parallèles.

9. Volume compris entre deux plans parallèles et des surfaces latérales planes, cylindriques, coniques se raccordant suivant des lignes droites. — Un pareil volume est la somme algébrique de volumes spécifiés dans les paragraphes précédents, tous compris


b
h
B'
B
1
C'
C''
A'
S
D
C
A''
A
2
A'
F'
b
O'
C'
E'
A''
F''
B'
S
C''
D''
E''
A
F
B
O
C
D
3
b
B'
B
4
X'
C
F
D
H
G
D'
A
E
O
X
5
Y'
C
F
D
H
G
A
E
O
X
6

entre les mêmes deux plans parallèles; donc l'omniformule lui est applicable.

10. Anneau engendré par un segment circulaire tournant autour d'un axe passant par le centre de l'arc du segment et situé dans son plan. — Soit V le volume engendré par le segment circulaire ADCH exécutant une révolution autour de XX'. Si on le considère comme compris entre les plans passant par A, C perpendiculaires à XX', ses bases B, b sont nulles, sa section B' équidistante des bases est la couronne engendrée par HD, H étant le milieu de la corde AC.

Soit h la hanteur EF, on a

$$V = \frac{2}{3} h\pi(OA^2 - OH^2) = \frac{2}{3} h\pi \times AH^2 = \frac{2}{3} \pi DH \times HD'$$

$$= \frac{2}{3} h\pi(DG^2 - GH^2) = \frac{2}{3} hB' = \frac{h}{6}(B + b + 4B'),$$

puisque B et b sont nulles.

Remarque. — Si le segment générateur devient un demi-cercle, l'omniformule donne naturellement

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

11. Segment sphérique à bases parallèles. — Son volume étant la somme des volumes engendrés par le segment circulaire ADCH et par le trapèze ACFE, l'omniformule lui est applicable.

Elle donne

$$V = \frac{FE}{6} \pi(AE^2 + CF^2 + 4DG^2 - 4HG^2);$$

et si on remplace dans cette expression $4DG^2 - 4HG^2$ par la quantité égale AC^2, on retombe sur la formule classique.

12. — L'omniformule s'applique évidemment aux onglets des volumes spécifiés §§ 10 et 11.

(A suivre.)

VARIÉTÉS

DU MOUVEMENT SCIENTIFIQUE EN ITALIE

UN NOUVEAU JOURNAL DE MATHÉMATIQUES A ROME — ANNONCE

Par M. **Aristide Marre.**

L'Italie fait des efforts constants et obtient des succès remarquables dans toutes les branches de la science contemporaine. L'élan scientifique y est donné de toutes parts et à tous les degrés de l'enseignement. L'Académie royale des sciences de Turin, l'Académie royale des *Lincei* de Rome et l'Académie pontificale des *Nuovi Lincei*, l'Institut royal lombard de Milan, l'Académie des sciences de Naples, l'Institut royal vénitien, l'Académie des sciences de Bologne, celles de Padoue, Pise, Modène, Palerme, Messine, etc., se livrent à l'envi à l'étude des sciences exactes et de leurs merveilleuses applications. Les Universités, les instituts techniques, les gymnases, toutes les écoles, grandes et petites, marchent vers un même but : la conquête de la science. C'est la science, en effet, qui désormais, dans la paix comme dans la guerre, sera le facteur principal de la force, de la grandeur et de l'indépendance des nations. On le comprend en Italie ; c'est pourquoi nous assistons en ce moment à ce remarquable spectacle : pendant qu'un illustre général, ambassadeur d'Italie en France, lit à l'Académie des sciences de Paris un mémoire « sur la densité et la figure de la Terre », un étudiant romain publie dans une revue belge, la *Mathesis*, une « note sur l'hélice osculatrice », et dans les écoles du peuple on étudie le petit livre du professeur Artimini, sur le téléphone et les autres instruments électriques. Aussi les statistiques téléphoniques récemment publiées mettent-elles en évidence ce fait spécial qui a bien sa signification et sa portée, à savoir que l'Italie, moins riche et moins peuplée que la France,

compte pourtant un bien plus grand nombre d'abonnés au téléphone.

Chez nos voisins, les mathématiciens, physiciens et astronomes forment une véritable légion. Qu'il nous soit permis de citer ici les noms de MM. Armuzzi, Aschieri, Ascoli, Azzarelli, Bardelli, Bartoli, Battaglini, Basso, D. Besso, Beltrami, Betti, Bombicci, prince Balthasar Boncompagni, Borgatti, Cagnassi, Canestrini, Cantoni, Capelli, Capitó, Cappa, Cardani, Casorati, Cattaneo, Cavalli, Celoria, Cerruti, Césaro, Colombo, Cordenons, Cremona, Denza, Emo, Fabri, Faifofer, Fambri, Farini, Favaro, Felici, Ferrari, Ferrini, Frattini, Formenti, Gastaldi, Genocchi, Giunti, Govi, Grassi, Guccia, Grattarola, Jadanza, Lazzeri, Luvini, Maisano, Marangoni, Martinetti, Martini, Masoni, général de Menabrea, Mugna, Nonnis-Marzano, d'Ovidio, Paci, Padova, Pagliani, Palmieri, Pavesi, Pennacchiotti, Pincherle, Pisati, Poncini, Porta, Provenzali, Pucci, Puppati, Realis (*), Riccardo de Paolis, Riccò, Righi, Roiti, Romanese, Rossi, Rovelli, Ruffini, Saccheri, Santini, Scacchi, Schiaparelli, Serpieri, Stefanelli, Tacchini, Trevellini, Velloni, Vicentini, Vimercati, Volta, Zanotti, etc.

Les journaux scientifiques ne manquent point aux étudiants en Italie; ils tiennent leurs lecteurs au courant des découvertes des inventions et des travaux publiés dans le royaume et dans les pays étrangers. Parmi les principaux, il suffira de mentionner le *Giornale di Matematiche* de Battaglini, la *Rivista di matematica elementare* du professeur Gastaldi, le *Periodico tecnico* de Saccheri, la *Rivista scientifico-industriale* de Guido Vimercati, le *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* du prince Balthasar Boncompagni, et pour la physique et la chimie, *il Nuovo Cimento*. A ces diverses revues, il conviendra d'ajouter le Journal de mathématiques qui vient d'être fondé, dans l'intérêt de l'enseignement secondaire, par David Besso, professeur de mathématiques à l'Institut royal technique de Rome, l'auteur

(*) Enlevé à la science et à l'affection de ses nombreux amis le 9 février dernier. G. L.

de savants travaux sur l'Analyse supérieure, et notamment sur les équations différentielles linéaires. Ce nouveau journal est intitulé : *Periodico di Matematica per l'Insegnamento secondario;* il paraîtra tous les deux mois et donnera six livraisons par an. Le premier cahier ou fascicule, numéro de janvier-février 1886, vient de paraître. Il contient un mémoire sur le tétraèdre à faces égales, par D. Besso; la démonstration d'une proposition fondamentale de la théorie de l'équivalence par A. Faifofer; des exercices pour l'école par D. Besso, c'est-a-dire trente cinq questions d'arithmétique et trente questions de trigonométrie, et enfin une revue bibliographique par G. Frattini. Cette quatrième et dernière partie du premier fascicule donne le compte rendu analytique des éléments de géométrie de Riccardo de Paolis, professeur de géométrie supérieure à l'Université royale de Pise.

Le prix de l'abonnement au *Periodico di Matematica* du professeur Besso, est de six francs par an pour l'Italie, et de sept francs pour les autres États de l'Union postale. Cette petite somme devra être adressée directement à M. David Besso, via Nazionale. nº 230, Rome. Les abonnés qui voudront collaborer au Journal, recevront gratuitement 25 exemplaires tirés à part de chacun de leurs travaux.

NOTICE NÉCROLOGIQUE SUR S. REALIS

Ce n'est pas, à proprement parler, une notice nécrologique que je me propose de consacrer à la mémoire du savant éminent dont j'ai annoncé la mort dans le précédent numéro du *Journal de Mathématiques spéciales*. Je n'ai pas assez, personnellement, connu Realis pour retracer, comme il faudrait le faire, cette vie tout entière vouée à la science et je connais seulement quelques-uns des nombreux et importants travaux qu'il a publiés en France et en Italie (*). Je veux seulement

(*) Une lettre de M. Joseph Realis, que j'ai reçue quand cette notice était composée, me donne la liste à peu près exacte des notes et mémoires publiés par son frère. Cette monographie comprend les titres de ces articles dont le nombre est supérieur à cent!

adresser quelques mots d'adieu bien sympathiques à celui qui, comme je l'ai dit dans les quelques lignes auxquelles je viens de faire allusion, a collaboré à cette publication et lui a témoigné tant de bienveillants encouragements. Cette collaboration a été l'objet, entre Realis et moi, d'un échange de lettres nombreuses; elles m'ont permis d'apprécier toute l'érudition et toute l'amabilité de ce profond et charmant esprit.

Savino Realis était né à Turin, le 18 octobre 1818, d'une ancienne et très distinguée famille de Piémont. Son père était avocat et passait pour l'un des meilleurs jurisconsultes du barreau de Turin. D'après des renseignements que je dois à l'obligeance de son vieil et fidèle ami, M. Genocchi, Realis montra de bonne heure un goût très vif pour l'étude des sciences exactes. Il fit ses études à l'Université de Turin, où il fut un des brillants élèves des professeurs Plana, Bidone, Giulio, et y obtint le diplôme d'ingénieur (1839). C'est en 1840 que son père le conduisit à Paris. Il put y poursuivre et y compléter ses études, et il garda de ce séjour à Paris un souvenir tel qu'il laissait rarement s'écouler une année sans venir y passer quelques semaines. Comme le rappelait, avec raison, un article paru le 15 février dans la *Gazette de Turin*, il aimait bien la France et il aimait bien Paris. Il prit part, très jeune, à la direction du premier chemin de fer qui fut construit dans le Piémont, et depuis cette époque (1843 environ) sa vie fut partagée entre l'exercice pratique de l'art de l'ingénieur et les recherches si profondes et si judicieuses qu'il a consacrées à la théorie des nombres ou à l'analyse indéterminée. Ces notes ou mémoires ont été publiées dans diverses revues, notamment : dans le *Bullettino* du prince Balthasar Boncompagni, en Italie, et dans les *Nouvelles Annales*, en France. Ici même, ont paru diverses notes et questions qui ont dû donner à nos lecteurs une idée, par l'intérêt et la difficulté qu'elles présentent, du savoir si étendu du géomètre qui les produisait. En m'adressant (le 30 décembre dernier) quelques pages qui ont été insérées dans le numéro de février suivant, Realis s'excusant du retard qu'il avait mis à me les envoyer, me disait : « Le dépérissement de ma santé est la principale justification que je puis alléguer pour mes négligences et

mon inaction. Pour cette raison, je ne me suis plus guère occupé à des travaux suivis, et ce n'est qu'occasionnellement qu'il m'arrive de m'appliquer à rédiger quelques notes, tirées, comme la petite communication ci-jointe, *de mes vieux brouillons.* »

Je suppose, et la lettre qu'on lira plus loin me paraît justifier cette hypothèse, qu'on trouvera dans les vieux brouillons dont parle ici Realis une ample moisson de pensées judicieuses et de formules pleines d'intérêt; à ce propos, on me permettra d'émettre le vœu que, pour le plus grand profit de la science, elles ne soient pas perdues !

On ne comprendrait peut-être qu'assez imparfaitement la teneur de la lettre à laquelle je viens de faire allusion si je n'expliquais ici, en deux mots, son origine. J'avais communiqué, à cette époque, à M. Catalan, avec l'expression de l'insuccès de mes recherches personnelles, le désir de voir se produire une démonstration rapide et simple de cette belle et fondamentale propriété des nombres : *tout nombre entier est la somme de quatre carrés entiers*. C'est à ce propos que M. Catalan me renvoya à Realis, qui me répondit la lettre suivante et (abstraction faite d'une partie plus personnelle, concernant le Congrès de Grenoble) je crois devoir la publier *in extenso* à cause de l'intérêt scientifique incontestable qu'elle possède. On comprendra certainement, après l'avoir lue, comment on s'attachait, même de loin, à l'homme dont l'érudition aimable et sûre vous était si libéralement ouverte, et quelle sympathie cordiale faisait naître en vous le commerce mathématique entretenu avec cet esprit supérieur, aussi modeste que savant.

G. L.

« Turin, 19 septembre 1885.

« Cher Professeur,

« Notre illustre ami et maître aime quelquefois à plaisanter, et à railler agréablement son monde ; voilà pourquoi il m'a mis en cause à propos de votre question sur la décomposition des nombres en quatre carrés. Démontrer le théorème de Fermat (et en général les théorèmes arithmologiques) au moyen

de simples identités, sans s'appuyer sur des considérations spéciales aux nombres entiers, cela ne se peut; les identités expriment des relations communes à toutes sortes de quantités et ne donnent que ce qu'on leur a déjà confié implicitement; elles ne créeront donc pas plus un théorème purement arithmologique qu'elles ne produiront une proposition de mécanique ou de physique.

«Les identités sont cependant d'admirables instruments pour simplifier le travail intellectuel, et pour faire ressortir les conséquences, quelquefois très cachées, des données que l'on possède. M. Catalan le sait mieux que personne, et votre excellente *Algèbre* est là pour montrer l'efficacité et la portée de ce moyen de recherche, quand il est bien employé. Puisque nous sommes sur le sujet, et que vous m'en fournissez l'opportunité, permettez-moi de rapporter ici les formules suivantes, que j'avais construites, il y a longtemps, à l'occasion de quelques tentatives infructueuses touchant la démonstration que vous avez demandée à notre illustre maître.

« I. — Hypothèse :

$$x(4x+k) = (x+\alpha)^2 + (x+\beta)^2 + (x+\gamma)^2 + (x+\delta)^2.$$

« Conséquence :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}{k-2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)},\\ 4x+k &= \frac{1}{4}\cdot\frac{(4\alpha-k)^2+(4\beta-k)^2+(4\gamma-k)^2+(4\delta-k)^2}{k-2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}. \end{aligned}\right.$$

« II. — Hypothèse :

$$(4x\mp 1)(x+k) = (x+\alpha)^2 + (x+\beta)^2 + (x+\delta)^2 + (x+\gamma)^2.$$

« Conséquence :

$$\left\{\begin{aligned} 4x\mp 1 &= \frac{1}{4}\cdot\frac{(4\alpha\pm 1)^2+(4\beta\pm 1)^2+(4\gamma\pm 1)^2+(4\delta\pm 1)^2}{4k\mp 1-2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)},\\ x+k &= \frac{(k-\alpha)^2+(k-\beta)^2+(k-\gamma)^2+(k-\delta)^2}{4k\mp 1-2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}, \end{aligned}\right.$$

où les signes se correspondent.

« III. — Hypothèse :

$$pq = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2.$$

« Conséquence :

$$\begin{cases} p = \dfrac{(ap-\alpha)^2+(bp-\beta)^2+(cp-\gamma)^2+(dp-\delta)^2}{q+(a^2+b^2+c^2+d^2)p-2(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)}, \\ q = \dfrac{(aq-\alpha)^2+(bq-\beta)^2+(cq-\gamma)^2+(dq-\delta)^2}{p+(a^2+b^2+c^2+d^2)q-2(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)}, \end{cases}$$

où l'on peut disposer de a, b, c, d à volonté, ces quantités étant indépendantes de p et q.

« Ce que vous avez demandé à l'éminent professeur, si j'ai bien compris, c'est une simplification à la démonstration donnée par Euler (en substitution de la démonstration difficile de Lagrange), et introduite, avec modifications, par Serret dans la première édition de son *Algèbre supérieure* (et aussi, d'une manière incomplète, par Le Besgue dans ses *Exercices d'analyse numérique*). Si les formules ci-dessus vous paraissent susceptibles d'une application utile pour l'objet que vous avez en vue, elles sont fort à votre service. Quant à en déduire, sans autre secours, la démonstration complète du théorème, c'est vain espoir; je crois pouvoir en dire autant des autres relations de ce genre que l'on pourrait produire. Aussi, je ne me suis plus occupé du théorème en question que pour en développer, à l'occasion, quelques conséquences ou quelques propositions complémentaires (V., par exemple, les *Nouvelles Annales*, année 1873, p. 212; année 1878, p. 381; année 1879, p. 500).

« Veuillez agréer, cher professeur, l'expression empressée de mes sentiments très sympathiques et de haute considération. « S. REALIS. »

QUESTIONS DIVERSES D'EXAMENS

(*Suite*, voir p. 63.)

8. — *On donne les deux équations*

$$x' = ax + by + c,$$
$$y' = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

qui permettent de calculer x', y' *connaissant* x *et* y.

Trouver les conditions que doivent vérifier les coefficients a,

b, c ; α, β, γ *pour que : calculant* x″ y″ *au moyen de* x′ y′ *comme on a déduit* x′ y′ *de la connaissance d'*x *et d'*y, *on ait* x″ = x, y″ = y; *et cela, quels que soient* x *et* y.

Les relations

$$x' = ax + by + c,$$
$$y' = \alpha x + \beta y + \gamma;$$
$$x = ax' + by' + c,$$
$$y = \alpha x' + \beta y' + \gamma;$$

donnent

$$x(a^2 + b\alpha - 1) + yb(a + \beta) + ac + b\gamma + c = 0,$$

et

$$x\alpha(a + \beta) + y(b\alpha + \beta^2 - 1) + c\alpha + \beta\gamma + \gamma = 0$$

Ces deux dernières égalités doivent être vérifiées, quelsque soient x et y. On a donc

$$a^2 + b\alpha - 1 = 0, \qquad b(a + \beta) = 0, \qquad ac + b\gamma + c = 0,$$
$$\alpha(a + \beta) = 0, \qquad b\alpha + \beta^2 - 1 = 0, \qquad c\alpha + \beta\gamma + \gamma = 0.$$

Ces six conditions se réduisent aux suivantes

$$\beta = -a, \qquad \alpha = \frac{1 - a^2}{b}, \qquad \gamma = -\frac{c(1 + a)}{b}.$$

L'interprétation géométrique de cette question, posée, nous a-t-on dit, aux examens du baccalauréat, à Rennes, est bien connue ; et l'on sait comment cet exercice se présente naturellement quand on veut déterminer les formules générales de la transformation homographique en involution. On peut vérifier d'ailleurs que les formules que nous venons de trouver

$$(\mathrm{H}) \left\{ \begin{array}{l} x' = ax + by + c, \\ y' = \dfrac{1 - a^2}{b} x - ay - \dfrac{(1 + a)c}{b}, \end{array} \right.$$

donnent bien, pour x'' et y'', les valeurs x et y qui ont servi de point de départ. Il suffit de résoudre les équations précédentes par rapport à x et à y.

Parmi les formules que l'on peut déduire des précédentes nous signalerons les suivantes :

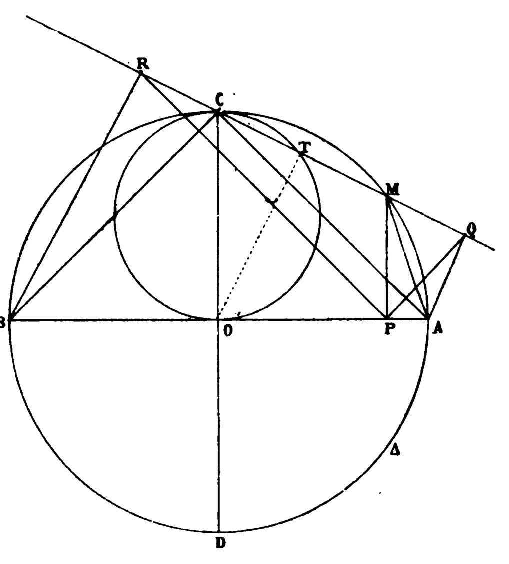
$$\beta x' = (\alpha + \beta)x - \alpha y,$$
$$\beta y' = (\alpha + 2\beta)x - (\alpha + \beta)y.$$

(A suivre.)

QUESTION 143

Solution par M. Paul Bourgarel, à Antibes.

On considère un cercle Δ *et deux diamètres rectangulaires* AB *et* CD; *d'un point* M, *mobile sur* Δ, *on abaisse une perpendiculaire* MP *sur* AB. *Par le point* P, *on mène des parallèles aux droites* CA *et* CB *et l'on joint* MC. *Cette droite* MC *rencontre les parallèles en question aux points* R *et* Q. *Trouver le lieu décrit par le milieu de* RQ. *Ce lieu est un cercle.*



Les deux angles APQ et AMQ sont tous deux égaux à 45°; donc le quadrilatère APMQ est inscriptible et par suite AQ est perpendiculaire sur CM.

On voit de même que BR est perpendiculaire sur CM. Si du point O on abaisse une perpendiculaire sur RQ, elle passe tout à la fois : 1° par le milieu de RQ parce que O est le milieu de AB, 2° par le milieu de CM parce que O est le centre du cercle qui passe par les points C et M. Ainsi le lieu cherché est le cercle décrit sur OC comme diamètre.

Nota. — Autres solutions par MM. Chapron; J.-B. Perrin, maître répétiteur au lycée de Clermont-Ferrand; Vigarié; Mazeman, élève au lycée de Lille (classe de M. Lefebvre); A. Fitz-Patrick, élève au lycée de Poitiers.

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL (*)

(SESSION DE JUILLET 1885)

MONTPELLIER

1° On donne un triangle ABC dont les côtés sont :

$$AB = 3a \quad BC = 6a \quad CA = 5a.$$

Trouver : 1° la médiane AD; 2° la distance de cette médiane à l'une des extrémités du côté BC; 3° cosinus BAC; 4° sinus BDA.

2° On donne deux circonférences concentriques (leurs rayons sont R et r) et une droite OD qui passe par le centre commun O. On propose de mener une sécante perpendiculaire à ABB'A' OD, de telle sorte que l'aire du triangle AOA soit dans un rapport donné m avec l'aire du quadrilatère OBDB'. On prendra pour inconnue la distance OE.

BORDEAUX

1° Calculer le volume d'un parallélépipède rectangle, sachant que les trois arêtes issues d'un même sommet sont en progression arithmétique, que la surface totale est $208^{m},9$, et que la somme des trois arêtes est 18 mètres.

2° On donne deux cercles qui se coupent, ainsi que leurs rayons R et r et la distance des centres d. On demande de calculer l'angle sous lequel on voit du centre du plus petit cercle la corde commune.

Application numérique: $R = 3256$, $r = 2460$, $d = 4245$.

3° Une droite rencontre la ligne de terre; trouver l'angle qu'elle fait avec cette ligne.

LYON

Première Série. — 1° Sur les côtés d'un angle droit AOB, on prend $OB = 1$, $OA = 2$. Mener par le point B dans le plan de cet angle un axe xy qui ne rencontre pas OA, de telle sorte que la figure tournant autour de xy, la somme des surfaces engendrées par les droites OA et OB soit égale à une quantité donnée S. Conditions de possibilité pour qu'il y ait deux solutions ou une seule.

Application numérique : $S = \frac{3}{11}$.

2° Les deux traces d'un plan sont, dans l'épure, dans le prolongement l'une de l'autre, et font avec la ligne de terre un angle de 60°. Trouver l'angle que le plan fait avec la ligne de terre.

(*) Énoncés communiqués par M. Monsallut, professeur au collège de Saint-Jean-d'Angély.

Deuxième série. — 1° Mesure de l'aire de la sphère.

2° Un ballon de forme sphérique a été gonflé avec 500^{mc} de gaz; calculer sa surface. — Une couche uniforme de verglas, de 1^{mm} d'épaisseur tombe sur l'hémisphère supérieur; quelle quantité de lest devra-t-on jeter pour conserver la même force ascensionnelle? (On prendra 0.9 pour la densité du verglas.)

Troisième série. — 1° Mesure du volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe situé dans son plan et passant par un seul sommet.

2° Appliquer au cas d'un triangle équilatéral dont le côté est de 1 mètre, tournant autour d'un axe incliné à 45° sur l'un des côtés.

GRENOBLE

1° Etant donné un cube dont le côté est a, on demande la forme, le volume et la surface du polyèdre dont les sommets seraient les centres des six faces du cube.

2° Entre quelles limites doit être compris l'arc x (supposé plus petit que 180°) pour satisfaire à l'inégalité

$$\frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{\sin x - 1} \geqslant 0.$$

AIX

1° On donne les trois côtés d'un triangle. Calculer l'angle A et rendre la formule calculable par logarithmes.

2° On donne un plan par ses traces et un second plan défini par la ligne de terre et un point. Trouver leur intersection.

3° Décrire le phénomène de la précession des équinoxes. Exposer le déplacement de l'axe du monde, qui est la cause de ce phénomène.

BESANÇON

1° Calculer les angles d'un triangle dont on donne les trois côtés :

$$a = 33^m,45, \quad b = 42^m,89, \quad c = 43^m,17;$$

2° Etablir comment on détermine l'intersection d'une droite et d'une sphère données par leurs projections.

QUESTIONS PROPOSÉES

210. — A, B, C étant les angles d'un triangle rectiligne :

1° Démontrer que l'expression

$$2\left(\operatorname{tg}\frac{A}{4} + \operatorname{cotg}\frac{A}{4}\right) - \operatorname{cotg}\frac{A}{4}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{A}{4}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{B}{4}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{C}{4}\right)$$

conserve la même valeur quand on effectue sur les lettres A, B, C une permutation circulaire.

2° Mettre sous une forme symétrique la valeur commune aux trois quantités que l'on peut ainsi former.

(Catalan.)

211. — Étant données deux circonférences O, O′, on mène les rayons OA, O′B qui se coupent en C sous un angle constant; on demande le lieu géométrique décrit par le milieu de AB. *(A. Fitz-Patrick.)*

212. — Démontrer qu'un triangle ABC a ses angles aigus ou qu'il possède un angle obtus suivant que la somme des carrés de ses trois côtés est plus petite ou plus grande que le double du carré du diamètre du cercle circonscrit; et réciproquement. *(G. L.)*

ERRATA (*)

Page	ligne	*Au lieu de:*	*Lisez :*
7	11	segment C,	segment CD.
14	dern. ligne	prolongeons AD,	prolongeons CD.
15	1	triangle BCD,	triangle BCA.
15	3	BC,	BD.
22	20	$3,3 = 0^{mq},01$,	$\pi a^2 = 0^{m}{}_{q},01$.
»	26	arête AB,	arête AS.
»	27	avec AB.	avec AB et AC.
»	32	arête AC,	arête AS.
37	5 en remont.	fig. 8.	fig. 7.
44	6	déterminons,	déterminer.
»	1 en remont.	$\sqrt{2}$ en dénominateur,	$2\sqrt{2}$.
45	8 en remont.	*symétrique de* A *par rapport au point* D,	*point d'intersection avec* AD *de la perpendiculaire menée par* C *sur* AC.
»	3, 6, 7, 9,	c en dénominateur,	$c\sqrt{2}$.
46	6 en remont.	COD, APC,	COE, BQC.
65	3	x^q,	x^p.
70	25	somme,	différence.

(*) Ces divers errata nous ont été signalés par M. Bécla, au Collège de Beauvais.

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 7792 6.

PROBLÈME DE MÉCANIQUE

Par M. **Éd. Guillet,** professeur au lycée d'Avignon

(*Suite*, voir p. 73).

Angle d'incidence au point B″. — En appelant v_{x_2} et v_{y_2} les projections horizontale et verticale de la vitesse en B″, nous aurons :

$$v_{x_2} = v_1 \sin(\alpha + \alpha'),$$
$$v_{y_2} = v_1 \cos(\alpha + \alpha') - gt_2.$$

Or nous connaissons v_1, $\sin(\alpha + \alpha')$ et t_2 et l'on a

$$\cos(\alpha + \alpha') = \cos\alpha \cos\alpha' - \sin\alpha \sin\alpha',$$

c'est-à-dire

$$\cos(\alpha + \alpha') = \frac{1 - 4\sin^2\alpha}{\sqrt{1 + 8\sin^2\alpha}}.$$

On aura donc

$$\left.\begin{aligned} v_{x_2} &= 4\, v_0 \sin\alpha \cos\alpha \\ v_{y_2} &= -v_0\,[1 + 4\sin^2\alpha] \end{aligned}\right\}. \qquad (35)$$

On pourra remarquer, comme en B′, que v_{y_2} est négatif.

Si nous désignons par φ' l'angle T′B″H″, nous aurons

$$\operatorname{tg}\varphi' = -\frac{v_{y_2}}{v_{x_2}},$$

ou

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{1 + 4\sin^2\alpha}{4\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Soit encore α'', l'angle N″B″T′ de la tangente en B″ avec la normale au plan incliné au même point; on a

$$\alpha'' = \frac{\pi}{2} - (\varphi' - \alpha),$$

d'où

$$\operatorname{tg}\alpha'' = \operatorname{cotg}(\varphi' - \alpha),$$

mais

$$\operatorname{cotg}(\varphi' - \alpha) = \frac{1 + \operatorname{tg}\varphi' \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\varphi' - \operatorname{tg}\alpha}.$$

On a donc :

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{1 + \dfrac{1 + 4 \sin^2 \alpha}{4 \sin \alpha \cos \alpha} \times \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\dfrac{1 + 4 \sin^2 \alpha}{4 \sin \alpha \cos \alpha} - \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}},$$

et enfin

$$\operatorname{tg} \alpha'' = 5 \operatorname{tg} \alpha. \qquad (36)$$

Loi de progression des angles d'incidence. — La formule précédente peut s'écrire

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \operatorname{tg} \alpha' + 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Or, en passant du point B″ au point suivant d'incidence B‴, les mêmes phénomènes se reproduisent évidemment avec cette seule différence que l'angle α' est remplacé par α'' et l'angle α''' remplace α'', de sorte qu'on a encore

$$\operatorname{tg} \alpha''' = \operatorname{tg} \alpha'' + \operatorname{tg} \alpha$$

ou

$$\operatorname{tg} \alpha''' = 7 \operatorname{tg} \alpha.$$

On aurait de même

$$\operatorname{tg} \alpha'''' = 9 \operatorname{tg} \alpha$$

et en général

$$\operatorname{tg} \alpha_n = (2n + 1) \operatorname{tg} \alpha. \qquad (37)$$

On voit ainsi que les tangentes des angles d'incidence suivent la loi de progression des nombres impairs.

Si n augmente indéfiniment, $\operatorname{tg} \alpha_n$ augmente aussi indéfiniment, de sorte que α_n a pour limite $\frac{\pi}{2}$ quand n tend vers l'infini. La sphère finira donc par rouler sur le plan incliné, mais seulement après un nombre infini de bonds.

Vitesse v_2 *du mobile en* B″. — On a

$$v_2^2 = v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2.$$

Or les formules (35) donnent

$$v_{x_2}^2 = 16 v_0^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha,$$

$$v_{y_2}^2 = v_0^2 [1 + 4 \sin^2 \alpha]^2 ;$$

donc

$$v_2^2 = v_0^2 [1 + 24 \sin^2 \alpha]. \qquad (38)$$

Si l'on appelle h'' la hauteur de chute capable de donner à un corps pesant la vitesse v_2, on aura

$$v_2^2 = 2gh''.$$

D'autre part

$$v_0^2 = 2gh;$$

donc

$$h'' = h\,[1 + 24 \sin^2 \alpha]. \qquad (39)$$

Détermination du sommet S′ *de la deuxième parabole.* — Si nous exprimons que l'équation

$$\frac{gx^2}{2v_1^2 \sin^2(\alpha + \alpha')} - x \operatorname{cotg}(\alpha + \alpha') - (a - x_1) \operatorname{tg} \alpha + y = 0 \quad (25)$$

a deux racines égales en x, la racine commune sera l'abscisse du sommet S′.

On a ainsi

$$x = \frac{v_1^2 \sin^2(\alpha + \alpha') \operatorname{cotg}(\alpha + \alpha')}{g}$$

ou

$$x = h' \sin 2(\alpha + \alpha'); \qquad (40)$$

on a aussi

$$y = (a - x_1) \operatorname{tg} \alpha + h' \cos^2 2(\alpha + \alpha'). \qquad (41)$$

Le sommet S′ est ainsi déterminé par ses deux coordonnées et la hauteur E′S′ du sommet S′ au-dessus de l'horizontale B′E′ est

$$\text{E'S'} = h' \cos^2 2(\alpha + \alpha'), \qquad (42)$$

Amplitude du troisième bond. — En désignant par A″ la troisième amplitude, il sera inutile de recommencer les calculs ; tout se passe comme dans le deuxième bond et il suffira dans la formule

$$\text{A}' = 4h' \sin(\alpha + \alpha') \frac{\cos \alpha'}{\cos^2 \alpha},$$

déduite de la relation (28), de remplacer

A′ par A″, h' par h'', et α' par α'';

ce qui donne

$$\text{A}'' = 4h'' \sin(\alpha + \alpha'') \frac{\cos \alpha''}{\cos^2 \alpha}.$$

Or

$$\sin(\alpha + \alpha'') \cos \alpha'' = \sin \alpha \cos^2 \alpha'' + \cos \alpha \sin \alpha'' \cos \alpha'';$$



de plus, de la formule

$$\operatorname{tg} \alpha'' = 5 \operatorname{tg} \alpha$$

on déduit

$$\sin \alpha'' = \frac{5 \sin \alpha}{\sqrt{1 + 24 \sin^2 \alpha}},$$

$$\cos \alpha'' = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + 24 \sin^2 \alpha}};$$

donc

$$\sin \alpha \cos^2 \alpha' + \cos \alpha \sin \alpha'' \cos \alpha'' = \frac{6 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{1 + 24 \sin^2 \alpha}.$$

D'autre part, on a trouvé

$$h'' = h(1 + 24 \sin^2 \alpha).$$

On a donc enfin

$$A'' = 24h \sin \alpha. \qquad (43)$$

Loi de progression des amplitudes. — La comparaison des formules (43) et (14) montre que

$$A'' = 3A.$$

Nous avons eu déjà

$$A' = 2A.$$

La loi se manifeste par ces trois premiers résultats et il est facile d'établir qu'on aura de même

$$A_{n-1} = nA,$$

A_{n-1} représentant l'amplitude de la n^e branche parabolique.

Nous avons eu, en effet :

$$A'' = \frac{4h'' \sin(\alpha + \alpha'') \cos \alpha''}{\cos^2 \alpha},$$

et, pour la n^e parabole, h'' sera remplacé par h_{n-1} et α'' par α_{n-1}. On aura donc

$$A_{n-1} = \frac{4h_{n-1} \sin(\alpha + \alpha_{n-1}) \cos \alpha_{n-1}}{\cos^2 \alpha}.$$

Or,

$$\sin(\alpha + \alpha_{n-1}) \cos \alpha_{n-1} = \sin \alpha \cos^2 \alpha_{n-1} + \cos \alpha \sin \alpha_{n-1} \cos \alpha_{n-1}$$

d'ailleurs,

$$\operatorname{tg} \alpha_{n-1} = (2n - 1) \operatorname{tg} \alpha;$$

d'où

$$\sin \alpha_{n-1} = \frac{(2n - 1) \sin \alpha}{\sqrt{1 + 4(n - 1) n \sin \alpha^2}},$$

$$\cos \alpha_{n-1} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + 4(n - 1) n \sin^2 \alpha}};$$

donc

$$\sin(\alpha + \alpha_{n-1}) \cos \alpha_{n-1} = \frac{2n \sin \alpha \cos^2 \alpha}{1 + 4(n-1) n \sin^2 \alpha}.$$

D'autre part

$$h_{n-1} = h[1 + 4(n-1) n \sin^2 \alpha].$$

On a donc enfin

$$A_{n-1} = n \times 8h \sin \alpha,$$

c'est-à-dire

$$A_{n-1} = nA. \qquad (44)$$

(A suivre.)

L'OMNIFORMULE DE CUBATURE

Par M. **Casimir Rey** (*).

(*Suite*, voir p. 79.)

13. — L'omniformule est vraie pour les volumes décrits par ABC, CBD, ABDC exécutant une révolution complète ou une portion de révolution autour de XX′, car ils sont la différence des volumes engendrés par BA*ab*, BC*ab*, etc., auxquels l'omniformule s'applique. Il est important de remarquer que XX′ passe par les centres O, O′ O″ des arcs AB, BC, CD : car si cela n'avait pas lieu, la proposition ne serait pas exacte (*fig.* 7).

14. Théorème. — *Deux volumes* V, v, *coupés constamment par des plans parallèles suivant des sections dans le rapport constant* K, *sont aussi dans le rapport* K.

On démontre le théorème exactement comme celui relatif à l'équivalence en volume de deux pyramides ayant la même hauteur et des bases équivalentes.

(*) Une erreur s'est glissée dans notre précédent article : (p. 94, l. en remontant), au lieu de

$$V = \frac{FE}{6} \pi (\overline{AE}^2 + \overline{CF}^2 + 4\overline{DG}^2 - 4\overline{HG}^2),$$

il faut lire

$$V = \frac{FE}{6} \pi (\overline{AE}^2 + \overline{CF}^2 + 4\overline{DG}^2 - 4\overline{HG}^2 + 4\overline{HG}^2).$$

15. — *Volume limité par des fuseaux cylindriques circonscrits à un segment sphérique à bases parallèles et par les plans de ces bases (fig. 8).*

Tout plan parallèle aux bases qui coupe le volume (ACDE... A'C'D'E') et le segment sphérique, y détermine deux sections: l'une semblable à la base ACDE... du volume, l'autre qui est le cercle inscrit dans la première section. Le rapport de ces deux sections est donc constant et égal à $\frac{\text{ACDE}\ldots}{\text{cercle } \text{O}_1\text{I}}$; par suite l'omniformule, s'appliquant au segment sphérique, s'applique en vertu du théorème précédent au volume dont nous nous occupons.

L'omniformule présente ici la particularité que son expression réduite ne contient pas π.

16. — *Volume précédent dont la base inférieure* B *passe par le centre de l'hémisphère et dont la base supérieure* b *est nulle (fig. 9.)*

Des volumes de cette nature sont par exemple ceux qui recouvrent des voûtes en arc de cloître en plein cintre.

Si r est le rayon de l'hémisphère, l'omniformule réduite donne

$$V = \frac{2}{3} Br.$$

Si B est un carré,

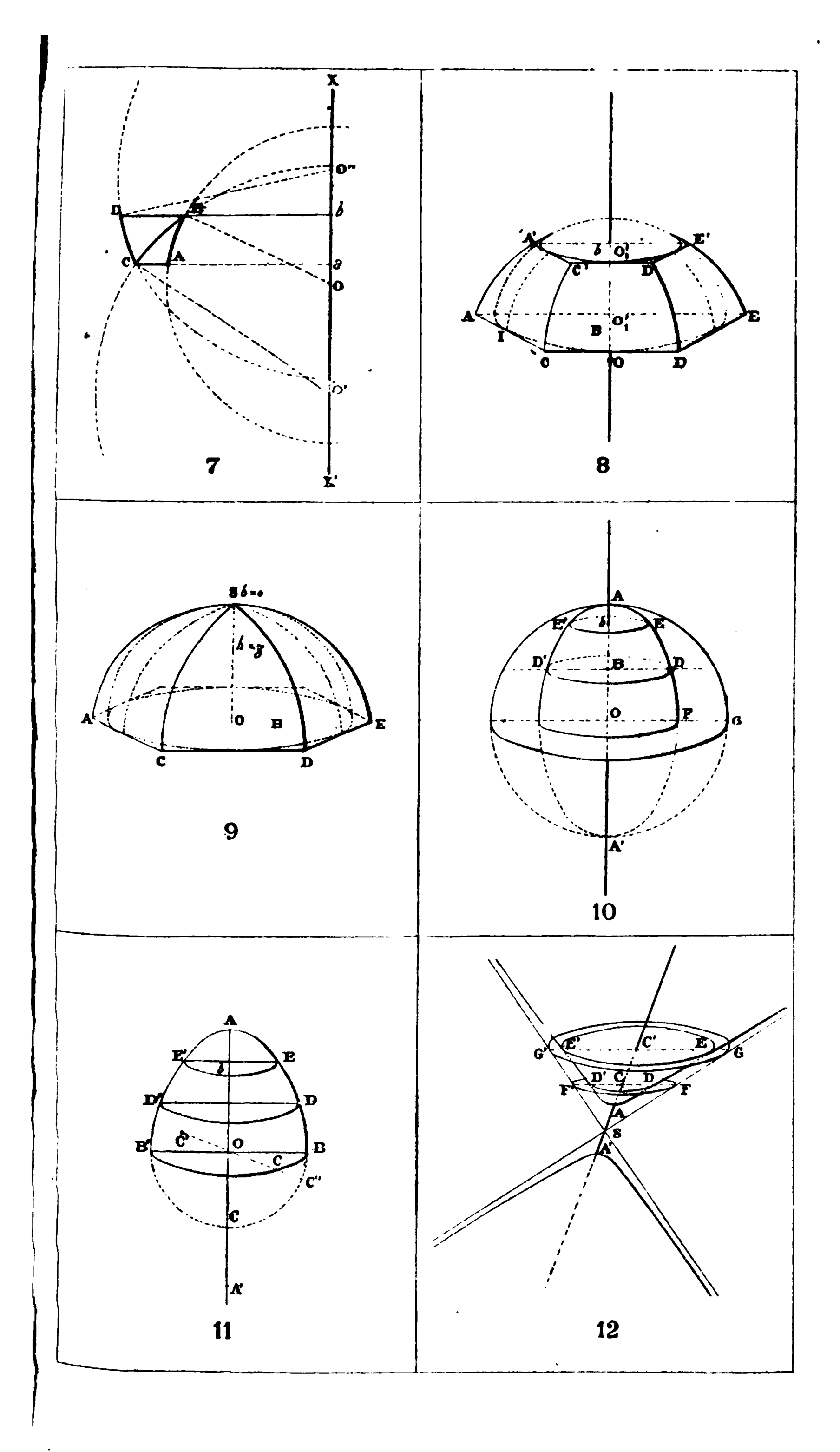
$$V = \frac{8r^3}{3}.$$

Si B est l'aire d'un polygone régulier dont le nombre des côtés double indéfiniment, l'omniformule donne naturellement à la limite

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

17. — *Volume limité par deux plans parallèles et des surfaces réglées se raccordant suivant des droites.*

Un pareil volume étant la limite de volumes spécifiés paragraphe 9, l'omniformule lui est applicable.



X
O"
D
B
b
C
A
a
O
O'
X'
7
A'
E'
b
C'
D'
A
E
I
B
C
O
D
8
S b=0
h=z
A
O
B
E
C
D
9
A
E'
b
E
D'
B
D
O
F
G
A'
10
A
E'
E
b
D'
D
B'
C'
O
B
C
C"
C
A'
11
G'
E'
C'
E
G
D'
C
D
F'
F
A
S
A'
12

18. Corollaire. — Comme volume de la famille spécifiée dans le paragraphe précédent, nous citerons :

1° Les segments à bases elliptiques parallèles, d'hyperboloïde à une nappe ;

2° Les segments à bases parallèles limités par une surface conoïde fermée ;

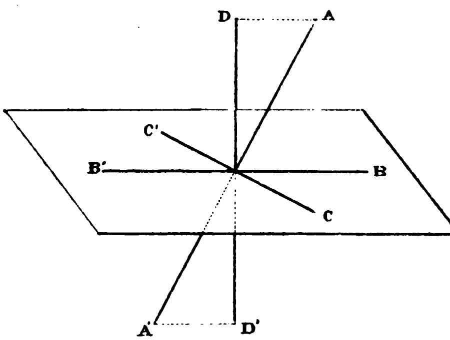
3° Les segments à bases parallèles limités latéralement par des surfaces planes, hyperboloïdales, paraboloïdales hyperboloïdales, conoïdales se raccordant suivant des droites.

19. — *Segments ellipsoïdaux à bases parallèles.*

1° Le segment DD'EE', déterminé dans un ellipsoïde de révolution par deux plans perpendiculaires à l'axe est au segment sphérique correspondant de la sphère OA dans le rapport $\frac{OF^2}{OG^2}$: car les sections faites dans les deux volumes par un plan parallèle aux bases, sont dans ce rapport *(fig. 10)*.

2° Le segment DD'EE', déterminé dans l'ellipsoïde à trois axes inégaux (AA'BB'CC') par deux plans perpendiculaires à AA', est au segment correspondant de l'ellipsoïde de révolution (AA'OBOC'') dans le rapport $\frac{OC}{OC''} = \frac{OC}{OB}$: car les sections faites dans les deux volumes par un plan parallèle aux bases, sont dans ce rapport *(fig. 11)*.

3° Soit un ellipsoïde dont AA' est un diamètre et dans lequel (BB', CC') sont les axes de la section diamétrale conjuguée.



Soit DD' la projection orthogonale de AA' sur la perpendiculaire au plan BOC menée en O.

Les sections déterminées dans les deux ellipsoïdes (AA', BB', CC'), (DD', BB' CC') par un plan parallèle à BOC sont égales ; donc deux segments compris

dans les deux ellipsoïdes par deux plans parallèles à BOC, seront des volumes équivalents.

De ce qui précède, il résulte que l'omniformule, vraie pour le segment sphérique à bases parallèles, est également vraie *dans tous les cas* pour le segment ellipsoïdal à bases parallèles.

20. — *Segment à bases parallèles de paraboloïde elliptique.*

21. — *Segment* V *à bases elliptiques parallèles de l'hyperboloïde à deux nappes (fig. 12).*

Soient AA′ le diamètre conjugué des bases du segment DD′EE′, SGG′ le cône asymptote et FF′GG′ le tronc de ce cône correspondant au segment.

Les plans parallèles aux bases du segment coupent le volume v compris entre l'hyperboloïde et le cône asymptote suivant des couronnes elliptiques EG, E′G′ et DF, D′F′ de même aire (voir § 28, note 2); donc v est mesurable par l'omniformule comme le serait un cylindre, et par suite l'omniformule s'applique au segment V qui nous occupe; donc le volume est la différence du volume du tronc de cône correspondant et du volume v.

22. — *Volume* V *limité par des plans parallèles et par des fuseaux cylindriques circonscrits à un segment* v *d'ellipsoïde de paraboloïde elliptique ou d'hyperboloïde à bases elliptiques situées dans les plans limitant* V.

Le volume V et le segment correspondant v sont coupés par des plans parallèles aux bases suivant des polygones semblables dans un rapport constant avec les ellipses inscrites correspondantes suivant lesquelles v est coupé (ellipses qui sont semblables entre elles).

Par suite l'omniformule étant vraie pour v, sera vraie pour V.

Comme exemple de ces volumes, on peut signaler ceux qui recouvrent différentes voûtes en arc de cloître.

(À suivre.)

THÉORÈMES
SUR LES INTERSECTIONS D'UN CERCLE ET D'UN TRIANGLE D'APRÈS M. H. M. TAYLOR, M. A.

Par **Émile Vigarié,** élève de l'École des Mines.

Dans un travail publié dans les comptes rendus de la Société Mathématique de Londres (*), M. H. M. Taylor a donné plusieurs théorèmes importants que nous allons faire connaître et dont nous déduirons des propriétés pour les cercles de Tucker, Lemoine, Neuberg, Taylor, M'Cay, ... que nous étudierons prochainement.

Si un triangle $\alpha\beta\gamma$ est inscrit dans un triangle donné ABC et si le cercle circonscrit à $\alpha\beta\gamma$ coupe les côtés BC, CA, AB en α', β', γ', nous allons montrer que le triangle $\alpha\beta\gamma$ restant semblable à lui-même :

1° Les angles du triangles $\alpha'\beta'\gamma'$ sont déterminés ;

2° Les droites $\alpha\beta'$, $\beta\gamma'$, $\gamma\alpha'$, $\alpha'\beta$, $\beta'\gamma$, $\gamma'\alpha$ conservent la même direction ;

3° Si les droites $\beta\gamma'$, $\gamma\alpha'$, $\alpha\beta'$ forment un triangle A'B'C' et si les droites $\gamma\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\beta\alpha'$ forment un second triangle A''B''C'', les triangles ABC, A'B'C', A''B''C'' sont homologiques, leur centre d'homologie est un point fixe o;

4° Le rapport des rayons des cercles ABC, $\alpha\beta\gamma$ est proportionnel au sinus de l'angle formé par un des côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$ avec une droite fixe ;

5° Le lieu du centre du cercle $\alpha\beta\gamma$ est une ligne droite ;

6° L'enveloppe de chacun des côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ est une parabole qui touche deux côtés du triangle ABC;

7° Le cercle $\alpha\beta\gamma$ enveloppe une conique dont le centre est

(*) Ce mémoire a pour titre : « *The relations of the intersections of a circle with a triangle*, par M. H. M. Taylor, M. A. Extrait des *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. XV, n°s 222, 223 (14 février 1884). Nous devons sa connaissance à M. Taylor, qui nous en a gracieusement envoyé deux exemplaires.

au centre du cercle minimum $\alpha\beta\gamma$ et dont un des axes est dirigé suivant la droite, lieu du centre du cercle $\alpha\beta\gamma$.

1. — *Les angles du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ sont déterminés.*

Supposons que les six points α, β, γ, α', β', γ' sont sur les côtés du triangle. Dans ce cas, on a entre les angles les relations

$$\left.\begin{array}{l}\alpha + \alpha' = B + C \\ \beta + \beta' = A + C \\ \gamma + \gamma' = A + B\end{array}\right\}. \qquad (1)$$

En effet on a :

$$\beta = \widehat{\alpha\beta\gamma} = \pi - \widehat{\alpha\alpha'\gamma} = \widehat{\beta\alpha'\gamma},$$
$$\beta' = \widehat{\alpha'\beta'\gamma'} = \pi - \widehat{\alpha'\gamma\gamma'} = \widehat{\beta\gamma\alpha'},$$
$$\beta + \beta' = \widehat{\beta\alpha'\gamma} + \widehat{\beta\gamma\alpha'} = \pi - B = A + C;$$

on prouverait de même que $\alpha + \alpha' = B + C$ et $\gamma + \gamma' = A + B$.

Les relations (1) ont lieu quelle que soit la position du triangle $\alpha\beta\gamma$, excepté cependant dans un cas, celui où l'un des sommets, α par exemple, est sur BC et les deux autres β, γ sur les prolongements de AB, AC au delà de B et C. On démontre que dans ce cas on a

$$\left.\begin{array}{l}\alpha + \alpha' = \pi + A \\ \beta + \beta' = B \\ \gamma + \gamma' = C\end{array}\right\}. \qquad (2)$$

2. — *Les droites $\alpha\beta'$, $\beta\gamma'$, $\gamma\alpha'$, $\alpha'\beta$, $\beta'\gamma$, $\gamma'\alpha$ conservent la même direction.*

En effet, il est facile de voir que les inclinaisons d'un côté, $\alpha\beta$ par exemple, sur CA, CB sont respectivement γ, γ'.

3. — *Les triangles* ABC, A'B'C', A"B"C" *sont homologiques, et ont pour centre d'homologie un point fixe* o.

Appliquons le théorème de Pascal à l'hexagone $\alpha'\alpha\beta'\beta\gamma'\gamma$; nous voyons que les couples de droites ($\alpha'\alpha$, $\beta\gamma'$), ($\beta'\beta$, $\gamma\alpha'$), ($\gamma'\gamma$, $\alpha\beta'$) se coupent sur une droite, c'est-à-dire que les côtés (BC, B'C'), (CA, C'A'), (AB, A'B') des triangles ABC, A'B'C' se coupent sur une droite; donc ces triangles sont homologiques.

En appliquant le théorème de Pascal à l'hexagone $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$ on voit que les deux triangles ABC, A"B"C" sont homologiques.

Le même théorème appliqué une troisième fois à l'hexagone $\beta'\beta\alpha'\gamma\gamma'\alpha$ montre que AA″A′ est une droite, de même pour BB″B′, CC″C′; donc les trois droites passent par un point o.

Il est évident que les droites $\beta\gamma'$, $\gamma\alpha'$, $\alpha\beta'$, restent parallèles à elles-mêmes quand $\alpha\beta\gamma$ reste semblable à lui-même; de même pour $\beta'\gamma$, $\gamma'\alpha$, $\alpha'\beta$; donc puisque les droites $\gamma'\beta$, $\gamma'A''$, $\beta A''$ conservent la même direction, les droites AA″A′, BB″B′, CC″C′ sont fixes et le centre d'homologie o est par suite fixe.

4. — *Le rapport des rayons des cercles* ABC, $\alpha\beta\gamma$ *est proportionnel au sinus de l'angle formé par un des côtés du triangle* $\alpha\beta\gamma$ *sur une droite fixe.*

La figure étant déterminée quand trois des six points sont déterminés, il est clair que nous pouvons exprimer chaque angle et chaque ligne de la figure en fonction des angles du triangle ABC, des angles du triangle $\alpha\beta\gamma$ et de l'angle que fait un des côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$ avec un côté de ABC.

Posons, par exemple, $\widehat{\beta\alpha\gamma} = \theta$.

Les angles des côtés de $\alpha\beta\gamma$ avec les côtés de ABC seront les suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} \widehat{B\gamma\alpha} = A + C - \theta \\ \widehat{C\alpha\beta} = B + \gamma - \theta \\ \widehat{A\beta\gamma} = C + \gamma - \theta \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \widehat{A\gamma\beta} = B - \gamma + \theta \\ \widehat{C\beta\alpha} = \alpha - C + \theta \\ \widehat{B\alpha\gamma} = \theta \end{array}\right.$$

Nous pouvons maintenant établir la relation qui existe entre l'angle θ et le rayon r du cercle circonscrit à $\alpha\beta\gamma$ dont les angles sont connus. Soit R le rayon du cercle circonscrit à ABC; on a :

$$B\alpha = \gamma\alpha \frac{\sin \widehat{B\gamma\alpha}}{\sin \widehat{\gamma B\alpha}} = \gamma\alpha \frac{\sin (A + C - \theta)}{\sin B},$$

$$C\alpha = \beta\alpha \frac{\sin \widehat{C\beta\alpha}}{\sin \widehat{\beta C\alpha}} = \beta\alpha \frac{\sin (\alpha - C + \theta)}{\sin C},$$

et
$$B\alpha + C\alpha = BC = a = 2R \sin A.$$

Si dans cette dernière égalité nous remplaçons $B\alpha$, $C\alpha$ par leurs valeurs, en tenant compte des relations

$$\gamma\alpha = 2r \sin \beta, \qquad \beta\alpha = 2r \sin \gamma,$$

on a

$$2r \sin\beta \frac{\sin(A + C - \theta)}{\sin B} + 2r \sin\gamma \frac{\sin(\alpha - C + \theta)}{\sin C} = 2R \sin A$$

ou
$$\frac{R}{r} = \frac{\sin\beta \sin(B + \theta)}{\sin A \sin B} + \frac{\sin\gamma \sin(\alpha - C + \theta)}{\sin A \sin C} = L \sin(\psi + \theta), \quad (3)$$

formule dans laquelle

$$L \sin\psi = \frac{\sin\beta}{\sin A} + \frac{\sin\gamma \sin(\alpha - C)}{\sin A \sin C},$$

$$L \cos\psi = \frac{\sin\beta}{\sin A} \operatorname{cotg} B + \frac{\sin\gamma \cos(\alpha - C)}{\sin A \sin C}.$$

On peut donner à la valeur de L une forme contenant symétriquement A et α, B et β, C et γ. Cette valeur est la suivante :

$$\begin{aligned} L^2 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C = {} & \sin^2\alpha \cos A \sin B \sin C \\ & + \sin^2\beta \sin A \cos B \sin C \\ & + \sin^2\gamma \sin A \sin B \cos C \\ & + 2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \sin A \sin B \sin C. \end{aligned}$$

(A suivre.)

GÉNÉRALITÉS SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

LES POINTS RÉCIPROQUES ET LES POTENTIELS D'ORDRE *p*. (*)

Par M. **G. de Longchamps.**

1. Définition des points réciproques d'ordre *p*. — Imaginons deux points M, M′ dont les coordonnées barycentriques, relativement au triangle de référence ABC, sont, respectivement, α, β, γ; α', β', γ'; et supposons que ces coordonnées vérifient les égalités

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^p} = \frac{\beta\beta'}{b^p} = \frac{\gamma\gamma'}{c^p}, \quad (A)$$

formules dans lesquelles p désigne un nombre entier, positif ou négatif; nous dirons que ces points M et M_p ainsi liés l'un à l'autre *sont réciproques et d'ordre* p.

(*) Pour plus de rapidité et de commodité, j'emploie dans cette note l'idée des coordonnées barycentriques; mais on peut rendre cette exposition absolument élémentaire en remplaçant α par l'aire du triangle MBC, etc.

La réciprocité des points M et M_p est évidente et résulte de la symétrie des formules (A) ; il va sans dire que, dans ces formules, a, b, c désignent les longueurs des côtés du triangle.

Nous nous proposons d'indiquer ici comment on peut construire, de proche en proche, les points réciproques de différents ordres : nous entrerons aussi, à propos de ces points, dans quelques réflexions générales sur les points et sur les droites qui, placés dans le plan d'un triangle, lui sont associés d'après une loi géométrique simple.

2. Points réciproques proprement dits. — Dans le cas particulier où l'on suppose $p = 0$, les formules (A) deviennent

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma' ;$$

les points qui correspondent à ces égalités sont ceux que nous avons particulièrement étudiés et que nous avons nommés *points réciproques*. Nous conserverons cette dénomination et quand il nous arrivera d'employer cette expression, sans spécifier l'ordre p des points réciproques considérés, il sera donc entendu que nous voulons parler des points réciproques de l'ordre zéro. Nous convenons aussi de représenter ces deux points par les lettres M et M_0.

On sait comment on construit ces points réciproques ; on joint AM, cette droite rencontre BC en μ et l'on prend le point μ' isotomique de μ (*) ; la droite $A\mu'$ et les deux autres droites analogues concourent au point réciproque M_0.

3. Points réciproques du colonel Mathieu, ou points inverses. — Les points réciproques du deuxième ordre ont fait autrefois l'objet d'une étude remarquable (**) ; ce sont les *points inverses* du colonel Mathieu.

(*) C'est-à-dire symétrique de μ par rapport au milieu de BC.

(**) *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1865. — Ces points ont été aussi appelés *points conjugués isogonaux* par M. Neuberg. Dans notre manière de voir, ces points rentrent dans la famille des points réciproques ; mais pour les distinguer des autres, et vu leurs propriétés remarquables, on peut, croyons-nous, leur conserver le nom qui leur a été donné par celui qui les a imaginés le premier.

Nous rappelons seulement que les points inverses se correspondent par la loi géométrique suivante :

Soit M_1 un point donné dans le plan d'un triangle ABC ; la droite symétrique de AM_1 par rapport à la bissectrice de l'angle formé par les semi-droites AB, AC d'une part, et les deux autres droites analogues d'autre part, se coupent en un point M_2. Les deux points M_1, M_2 associés de cette façon sont les points inverses du colonel Mathieu ou, dans le système de correspondance plus général que nous imaginons ici, les points réciproques du deuxième ordre.

4. Points réciproques du premier ordre. — Entre les points réciproques proprement dits et les points inverses se placent tout naturellement les points réciproques du premier ordre M, M_1, dont les coordonnées barycentriques vérifient les égalités :

$$\frac{\alpha\alpha_1}{a} = \frac{\beta\beta_1}{b} = \frac{\gamma\gamma_1}{c}.$$

A ces formules correspond une transformation des figures qui ne paraît pas encore avoir été étudiée et que d'ailleurs nous ne voulons pas aborder, du moins en ce moment. Nous nous proposons seulement d'indiquer une construction géométrique permettant de trouver le point M_1, point réciproque du premier ordre, correspondant à un point donné M.

Lorsque nous aurons comblé, comme on va le voir, cette lacune qui existait entre le principe de la transformation du colonel Mathieu et celui de notre transformation par points réciproques, il sera donc acquis que les points réciproques d'ordre 0, 1, ou 2, se déduisent du point donné par des constructions connues et simples. Nous avons rappelé tout à l'heure celles qui donnent les points réciproques d'ordre 0 et 2 ; mais il nous reste à montrer comment, d'un point donné M, on déduit le correspondant réciproque du premier ordre M_1.

5. Construction des points réciproques du premier ordre. — Considérons le triangle ABC et, sur les directions BA, CA, prenons $BP = CQ = \lambda$; nous ferons d'abord

observer que le cercle APQ passe par un second point fixe situé sur le cercle circonscrit à ABC et sur la bissectrice extérieure de l'angle A.

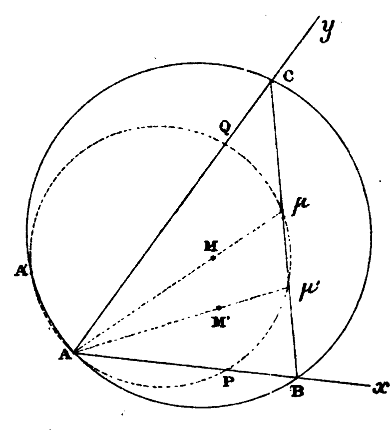
En effet, prenons AB et AC pour axes de coordonnées : l'équation du cercle APQ est

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos A - (c - \lambda) x - (b - \lambda) y = 0,$$

ou

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos A - cx - by + \lambda (x + y) = 0.$$

Sous cette forme, nous reconnaissons immédiatement que APQ passe, abstraction faite de A, par un autre point fixe A′ appartenant au cercle circonscrit ABC et à la bissectrice extérieure de l'angle A.



Cette remarque étant faite, prenons sur les droites Aμ, Aμ′ deux points quelconques M (α, β, γ) et M′ (α′, β′, γ′).

Nous avons

$$C\mu \,.\, C\mu' = CQ \,.\, b,$$

et

$$B\mu \,.\, B\mu' = BP \,.\, c,$$

d'où (puisque CQ = BP),

$$\frac{C\mu}{B\mu} \cdot \frac{C\mu'}{B\mu'} = \frac{b}{c}.$$

Mais

$$\frac{C\mu}{B\mu} = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{C\mu'}{B\mu'} = \frac{\beta'}{\gamma'};$$

écrivons donc, finalement,

$$\frac{\beta\beta'}{b} = \frac{\gamma\gamma'}{c}.$$

En appliquant cette remarque aux trois sommets du triangle ABC, on voit comment, par le moyen de la circonférence AA′μ et des deux autres circonférences analogues, on pourra trouver le point M′, réciproque du premier ordre du point donné M.

Parmi les correspondances remarquables dans les points réciproques du premier ordre, nous citerons les suivantes :

1° Au centre de gravité

$$\alpha = \beta = \gamma,$$

correspond le point

$$\frac{\alpha'}{a} = \frac{\beta'}{b} = \frac{\gamma'}{c},$$

c'est-à-dire le centre du cercle inscrit.

2° Au réciproque du centre du cercle inscrit

$$\alpha a = \beta b = \gamma c,$$

correspond le point

$$\frac{\alpha}{a^2} = \frac{\beta}{b^2} = \frac{\gamma}{c^2},$$

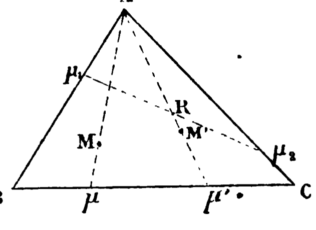
c'est-à-dire le point de Lemoine.

6. — Avant de quitter les points réciproques du premier ordre, je veux encore faire connaître, concernant ces points, une élégante construction qui m'a été communiquée par M. Neuberg.

Les notations précédentes étant conservées, prenons

$$A\mu_1 = B\mu. \qquad A\mu_2 = C\mu\,;$$

la droite qui joint A au milieu de $\mu_1\mu_2$ passe par M, réciproque du premier ordre de M.



En effet, nous avons

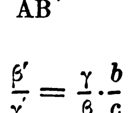
$$\frac{\mu_1 AR}{BA\mu'} = \frac{A\mu_1 . AR}{AB . A\mu'},$$

$$\frac{RA\mu_2}{\mu' AC} = \frac{AR . A\mu_2}{A\mu' . AC},$$

et, par suite,

$$\frac{\mu' AC}{\mu' AB} = \frac{A\mu_1 . AC}{A\mu_2 . AB} = \frac{B\mu}{C\mu} \cdot \frac{AC}{AB},$$

ou



$$\frac{\beta'}{\gamma'} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{b}{c}$$

ou enfin

$$\frac{AA'}{b} \cdot \frac{BB'}{b} = \frac{\gamma\gamma'}{c}.$$

En appliquant cette construction aux points B et C on obtient ainsi trois droites qui concourent au point cherché M'.

Nous pouvons aborder maintenant le problème que nous avions d'abord en vue et dans lequel nous nous proposions la construction du point réciproque d'un ordre quelconque, correspondant à un point donné.

(A suivre.)

QUESTIONS DIVERSES D'EXAMENS

(*Suite*, voir p. 91)

---

9. — *Résoudre l'équation*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b+x}.$$

Pour éviter certaines longueurs, très relatives, dans le calcul proposé, on observera que cette équation peut s'écrire

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b+x}-\frac{1}{x},$$

ou

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{-a-b}{x(x+a+b)},$$

ou encore

$$(a+b)\{x^2+x(a+b)+ab\}=0.$$

Finalement l'équation proposée est donc

$$(a+b)(x+a)(x+b)=0.$$

Si l'on suppose $a+b=0$, l'équation est identique; au contraire, si l'on a $a+b\neq 0$, les racines sont $-a$ et $-b$.

Remarque. — Beaucoup d'équations du second degré peuvent se ramener à deux équations du premier degré quand on groupe les termes qui les constituent dans un certain ordre. Ainsi les équations

$$\frac{a}{x}+\frac{a-1}{x-1}=2,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{a-1}{x-1}=2,$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x + b - a} = 2,$$
$$\frac{x}{a} + \frac{b}{x + b - a} = 2,$$

se résolvent très simplement et sans avoir recours aux formules ordinaires, en observant que $x = a$ est, évidemment, une racine.

Soit encore l'équation

$$\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

En l'écrivant sous la forme

$$\frac{1}{x - a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x - b},$$

on met en évidence la racine $a + b$.

Ces artifices de calcul permettent aussi de résoudre certaines équations d'un degré supérieur au deuxième.

1° Ainsi, l'équation

$$\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2} = 0$$

(*Baccalauréat*, Paris, juillet 1882)

est du troisième degré, mais elle admet visiblement la racine $x = 0$. On met d'ailleurs cette racine en évidence, en écrivant le premier membre sous la forme

$$\frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{2x}{x^2 - 4} = 0.$$

2° Dans l'équation du troisième degré

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x + 3} = 0,$$

on met en évidence la racine $x = -\frac{3}{2}$ en associant : 1° les fractions extrêmes, et 2° les deux fractions intermédiaires.

3° Pour citer un dernier exemple de cette méthode qui consiste, comme l'on voit, à signaler *a priori* une solution évidente, considérons encore les équations

$$ax + by + cz = b + c,$$
$$bx + cy + az = c + a.$$
$$cx + ay + bz = a + b;$$

ces équations sont visiblement vérifiées par $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$. Si le dénominateur Δ des inconnues n'est pas nul, ces équations ne comportant qu'une solution, elles se trouvent, par cela même, résolues sans calcul.

Si l'on veut poursuivre la discussion de ce système, on doit former Δ et l'on trouve

$$\Delta = 3abc - a^3 - b^3 - c^3.$$

La discussion du signe de Δ et, par suite, la détermination des valeurs de a, b, c pour lesquelles Δ passe par zéro, offrirait quelque difficulté si l'on n'observait pas que l'on a

$$\Delta \equiv (a + b + c)(ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2),$$

et

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \equiv \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(b-c)^2 + \frac{1}{2}(c-a)^2.$$

Cette méthode de *résolution instantanée*, si l'on peut dire, d'une équation donnée, convient particulièrement bien à certains exemples et elle nous paraît propre à développer cet esprit de combinaison qui trouve, dans le calcul algébrique. de si fréquentes applications.

Nous en donnerons un dernier exemple en prenant l'équation

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}. \qquad (1)$$

Il est évident que cette équation sera vérifiée si l'on assigne à x une valeur telle que chacune des fractions qui constituent le premier membre soit égale à l'une des fractions du second membre. Cela revient à dire que l'égalité

$$A + B = A' + B' \qquad (2)$$

est vérifiée si l'on a $A = A'$ et, en même temps, $B = B'$. Bien entendu, la réciproque n'est pas nécessaire.

En regardant attentivement l'égalité (1) on reconnaît alors que pour $x = a + b$, les conditions suffisantes que nous venons d'admettre pour (2) sont vérifiées pour (1). On a, ainsi, une des racines de l'équation proposée.

L'autre racine x'' s'obtient, sans calcul, en appliquant les principes bien connus relatifs aux relations qui existent entre les coefficients et les racines d'une équation. On trouve alors

$$x'' = \frac{2ab}{a+b}.$$

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. CATALAN.

... Je vous dois des remerciements pour la publication de l'aimable et savante lettre du bien regretté Realis. Cependant, cette lettre appelle, me semble-t-il, quelques mots d'explication...j'allais dire : *de justification.* Il n'a jamais été dans ma pensée de vouloir une démonstration du beau théorème de Fermat au moyen de *simples identités.* Si mes souvenirs sont fidèles, voici comment les choses se sont passées.

Quand vous m'avez demandé une démonstration de ce théorème, je vous ai répondu : « Adressez-vous à Realis ; il est, en théorie des nombres, beaucoup plus compétent que moi » ; ou quelque chose d'approchant. Quant à la *nature* de cette démonstration, c'est, comme vous l'écrivait Realis, « une simplification à la démonstration donnée par Euler ».

En 1848, M. Hermite a donné, dans le *Journal de Liouville*, une démonstration très simple de ce premier lemme :

Tout nombre premier, de la forme $4K + 1$, *est la somme de deux carrés.*

Si le plus éminent des géomètres français pouvait en faire autant pour cette autre proposition :

Tout nombre premier, de la forme $4K - 1$, *est la somme de quatre carrés,*
votre désir, qui est aussi le mien, serait accompli. La démonstration exposée par Le Besgue est, de tout point, fort peu satisfaisante...

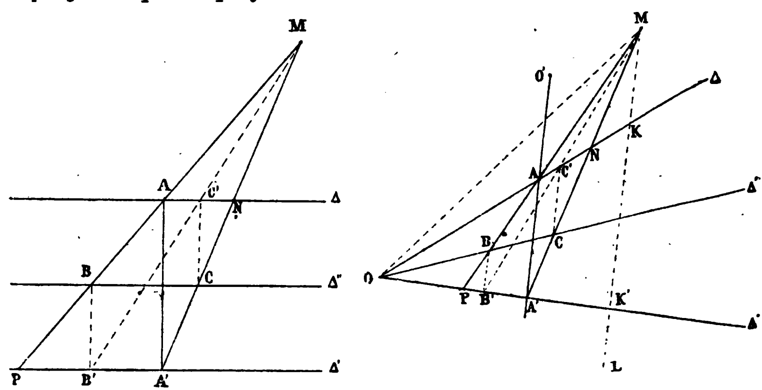
NOTA. — Je ne crois pas que la notice que j'ai publiée sur Realis puisse prêter à la confusion contre laquelle proteste M. Catalan. La pensée de prendre pour la démonstration du théorème de Fermat le secours des identités est une idée que j'avais *personnellement* communiquée à Realis et qu'il a combattue dans la lettre qu'on a pu lire.

Peut-être la conclusion de cette lettre est-elle trop absolue et il me paraît difficile de borner, *à priori*, l'influence des identités dans cette partie de la théorie des nombres où l'on ne fait pas intervenir *la forme arithmétique* de ceux-ci, mais simplement, comme dans le théorème en question, la condition qu'ils sont entiers. G. L.

QUESTION 168

Solution par M. Delpirou (Lycée Janson de Sailly).

Soient Δ, Δ′ *deux parallèles et* Δ″ *la parallèle équidistante; soit aussi* AA′ *une perpendiculaire commune à* Δ *et à* Δ′. *Ayant pris un point* M, *arbitrairement, dans le plan de ces droites,* MA *et* MA′ *rencontrent* Δ″, *respectivement, aux points* B *et* C. *On projette* B *en* B′ *sur* Δ′; *et* C *en* C′ *sur* Δ. *Démontrer que les trois points* C′, M, B′ *sont en ligne droite. — Généraliser cette propriété qui est projective.*



C étant le milieu de A′N, C′ est le milieu de AN.

D'autre part B étant au milieu de PA, B′ est milieu de PA′; donc MC′ passe par B′, puisque Δ et Δ′ sont parallèles.

Supposons que Δ, Δ′, Δ″ soient trois droites concourantes en O. Soit AA′ une sécante quelconque, et M le point considéré

du plan. Par M menons ML parallèle à AA′ et joignons MO. Par B et C menons BB′ et CC′ parallèles à AA′.

Considérons le faisceau O(MΔΔ″Δ′) coupé par les deux sécantes MP, MA′, on a

$$(MABP) = (MNCA')$$

mais d'autre part

$$(MABP) = (K'A'B'P)$$

et

$$(MNCA') = (KNC'A);$$

donc

$$(K'A'B'P) = (KNC'A),$$

ce qui exige que la droite B′C′ passe par le sommet M du faisceau M(KNC′A).

Remarque. — On serait arrivé au même résultat en projetant la première figure sur un plan quelconque et en prenant dans l'espace un centre de projection, ΔΔ′Δ″ seraient devenues trois droites concourantes et l'on aurait reproduit la deuxième figure.

Nota. — Cette généralisation n'est pas aussi complète que le comporte l'énoncé de la question proposée.

Il fallait observer d'abord que la propriété indiquée subsistait pour *trois parallèles quelconques* et pour une transversale oblique AA′; ce qui permet, en faisant la *projection conique* de la figure (sa perspective, si l'on préfère) de remplacer Δ, Δ′, Δ″ par *trois droites concourantes quelconques*; et les parallèles AA′, BB′, CC′ sont alors représentées sur la figure perspective par trois droites *concourantes*. En reproduisant la démonstration qu'on vient de lire, on vérifie la proposition suivante qui est la généralisation de la remarque élémentaire, tout à fait évidente, qui correspond à la première figure.

Étant données trois droites concourantes Δ, Δ′, Δ″ *et une transversale* O′AA′, *on joint* MA *qui rencontre* Δ″ *en* B, *puis* MA′ *qui coupe* Δ″ *en* C; *les droites* O′B *et* O′C *coupent* Δ *et* Δ′ *respectivement en des points* B′ *et* C′ *qui sont la ligne droite avec* M.

C'est ainsi qu'en partant des propriétés géométriques les plus simples et les plus évidentes, on arrive sans effort à découvrir d'autres propriétés beaucoup moins visibles et la démonstration de ces dernières constitue un exercice utile, lequel ne laisse pas, parfois, d'offrir quelques difficultés.

Dans les solutions que nous avons reçues, sauf dans celle de M. Chapron, la généralisation complète n'a pas été donnée. M. Chapron a bien fait la projection conique de la figure, mais il n'a pas cru devoir vérifier par une démonstration directe la propriété ainsi trouvée, et, dans notre pensée, c'était cette vérification même qui constituait tout l'intérêt de la question posée. G. L.

Nota. — Ont résolu (avec la restriction que nous venons de faire) cette question : MM. Chapron, à Bragelogne; G. Potier, lycée Henri IV (classe de M. Colas); Lavialle de Lameillère (id.); Garriau (id.); L. Prince et Bourdier, lycée de Grenoble; Anatole Chapelier, au lycée de Nancy.

QUESTIONS PROPOSÉES

213. — On considère deux cercles γ, γ' et sur leurs circonférences deux points A, A'; on propose de trouver sur l'axe radical Δ un point M tellement situé que les droites MA, MA' rencontrent les circonférences considérées en deux points B et B' tels que BB' soit perpendiculaire sur Δ.

(Bordage.)

214. — Lorsque quatre points A, B, C, D sont situés en ligne droite et dans l'ordre indiqué, ils déterminent six segments parmi lesquels deux (AC et BD) empiètent l'un sur l'autre.

Démontrer que si l'on fait abstraction de ces deux segments, et si les quatre points forment une division harmonique, les quatre autres segments jouissent de la propriété que l'inverse du plus petit est égal à la somme des inverses des trois autres.

(G. L.)

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 9458-6.

PROBLÈME DE MÉCANIQUE

Par M. **Éd. Guillet,** professeur au lycée d'Avignon

(*Suite*, voir p. 97).

MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE

Décrivons une circonférence sur AB comme diamètre; soit BN la normale au plan incliné en B, et BC la direction de la vitesse après le choc. Nous allons démontrer que l'horizontale LCS menée par le point C, où la vitesse de départ en B rencontre la circonférence, passe au sommet S de la première parabole.

En effet, le triangle rectangle BLC donne

$$BL = BC \cos 2\alpha,$$

et le triangle rectangle ABC donne à son tour

$$BC = h \cos 2\alpha.$$

On a donc

$$BL = h \cos^2 2\alpha.$$

Or la formule (21) nous a fourni

$$ES = h \cos^2 2\alpha.$$

Donc

$$BL = ES,$$

c'est-à-dire que l'horizontale du point C passe au sommet S.

Le lieu des foyers de toutes les paraboles décrites par un projectile lancé de B avec la vitesse initiale v_0 et sous des angles différents est, comme on sait et comme il est facile de le démontrer géométriquement, une circonférence décrite de B comme centre avec BA pour rayon. On aura donc, en particulier, le foyer F de la parabole BSB′ en prolongeant AC d'une quantité égale CF ; et la verticale DSFE sera l'axe de la parabole.

Cette construction montre en même temps que si l'on mène l'horizontale FI, on a

$$LI = LA$$

et, par conséquent, aussi

$$SF = SD.$$

Ce qui prouve que l'horizontale ADD′ est la directrice de la première parabole BSB′.

Pour trouver le point B′ où cette parabole rencontre BX, nous remarquerons que la tangente à la courbe parallèlement à BX a son point de contact sur le diamètre conjugué de cette droite BX; de sorte que si, par le point de contact de cette tangente, nous menons une parallèle à l'axe, elle coupera BX au milieu de BB′.

Pour mener la tangente à la parabole parallèlement à BX, supposons le problème résolu et abaissons du foyer F une perpendiculaire sur cette tangente ou sur sa parallèle BX. Cette perpendiculaire coupe la directrice en un point M, qui appartient au diamètre conjugué de la tangente. Il suffira donc de mener MP parallèle à AB pour avoir le milieu P de BB′ et, par suite, en prenant PB′ = PB, on aura le point B′.

Quant à la tangente en B′, on l'obtiendra en menant la bissectrice de l'angle K′B′F, formé par le rayon vecteur B′F et la parallèle à l'axe menée en B′.

Si l'on veut déduire de cette construction l'abscisse du sommet S ou du foyer F, on remarquera que, dans le triangle rectangle BFI, on a

$$BF = h \qquad \text{et} \qquad \widehat{FBA} = 4\alpha;$$

d'où

$$IF = h \sin 4\alpha;$$

c'est le résultat donné par la formule (19).

De même pour obtenir l'abscisse x_1 du point B′, nous remarquerons que

$$x_1 = 2AM.$$

Mais

$$AM = IF + DM.$$

Or

$$DM = DF \operatorname{tg} \alpha$$
$$DF = 2AL$$
$$AL = h \sin^2 2\alpha.$$

Donc

$$DM = 2h \sin^2 2\alpha \operatorname{tg} \alpha.$$

Par suite

$$x_1 = 2h \sin 4\alpha + 4h \sin^2 2\alpha \operatorname{tg} \alpha$$

ou

$$x_1 = 4h \sin 2\alpha[\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha],$$

mais

$$\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha = 1;$$

on a donc enfin

$$x_1 = 4h \sin 2\alpha.$$

Et l'on retrouve ainsi la formule (11).

On retrouvera de même l'amplitude A en divisant x_1 par cos α, ce qui donne

$$A = 8h \sin \alpha.$$

Nous déterminerons tout aussi facilement, et de la même façon, tous les éléments de la deuxième parabole B'S'B'', pourvu que nous connaissions la hauteur de chute h' capable de donner la vitesse v_1, en même temps que la direction de cette vitesse après le choc.

Or, il est facile de mener B'C'' telle que B'N' soit bissectrice de l'angle TB'C'.

Quant à h', nous avons trouvé :

$$h' = h[1 + 8 \sin^2 \alpha].$$

Or, si nous appelons K' le point de rencontre de la verticale en B' avec la directrice ADD' de la première parabole, nous voyons que

$$B'K' = B'U + AB.$$

Mais

$$B'U = x_1 \operatorname{tg} \alpha,$$

c'est-à-dire

$$B'U = 4h \sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha$$
$$B'U = 8h \sin^2 \alpha.$$

On a donc

$$B'K' = h[1 + 8 \sin^2 \alpha],$$

c'est-à-dire

$$B'K' = h'.$$

On voit ainsi que la vitesse v_1 en B' est la même que si la sphère tombait librement en ce point de la même horizontale ADK' du point de départ A, et la deuxième parabole aura même directrice que la première.

On décrira donc encore une circonférence sur B'K' comme diamètre, et par le point C', où elle coupe B'C', on mènera la tangente C'S' au sommet de la deuxième parabole.

Le foyer F' se déterminera en prenant sur le prolongement de K'C' une longueur égale C'F'.

D'ailleurs ce foyer F' devra encore se trouver sur la circonférence FKF' décrite de B' comme centre avec B'K' pour rayon.

La connaissance du foyer F' et de la directrice ADD' détermine complètement la parabole, et l'on trouvera encore le point d'intersection B" avec BX comme on a trouvé le point B'.

La figure montre comment nous avons déterminé les sommets S, S', S"..., les foyers F, F', F" et les milieux P, P'... des amplitudes, ainsi que les tangentes en B, B', B"...

(A suivre.)

L'OMNIFORMULE DE CUBATURE

Par M. **Casimir Rey** (*).

(*Suite*, voir p. 101.)

23. Formule de Simpson. — La formule de Simpson

$$V = \frac{d}{3}(s_1 + 4s_2 + 2s_3 \dots + 4s_{2n} + s_{n+1}),$$

n'est autre que l'omniformule dans laquelle on fait

$$h = 2d,$$

et elle mesure approximativement le volume, parce que ses sections de rang impair le décomposent en segments auxquels l'omniformule s'applique ou rigoureusement ou très approximativement; les sections doivent être assez rapprochées pour que leurs surfaces ne contiennent pas de ligne d'inflexion entre les sections de rang impair.

24. Démonstration analytique de l'omniformule. — Soient trois axes de coordonnées OX, OY, OZ; θ l'angle de

OZ avec le plan XOY et la surface s dont l'aire est exprimée par le polynôme $(A_0z^2 + A_1z + A_2)$ dans lequel A_0, A_1, A_2 sont des paramètres donnés.

La primitive de $A_0z^2 + A_1z + A_2$ est

$$\frac{A_0z^3}{3} + \frac{A_1z^2}{2} + A_2z + C,$$

C désignant une constante arbitraire.

Le volume V engendré par le déplacement de s quand z varie de $z = z_0$ à $z = z_1$ est donné par

$$V = \left[\frac{A_0}{3}(z_1^3 - z_0^3) + \frac{A_1}{2}(z_1^2 - z_0^2) + A_2(z_1 - z_0)\right] \sin\theta$$

ou, après la mise de $(z_1 - z_0)$ en facteur commun et les réductions faites convenablement, par

$$V = \frac{(z_1 - z_0)\sin\theta}{6} \times \left\{\begin{array}{l} A_0z_1^2 + A_1z_1 + A_2 = B \\ + A_0z_0^2 + A_1z_0 + A_2 = b \\ + 4\left(A_0\left(\frac{z_1 - z_0}{2}\right)^2 + A_1\left(\frac{z_1 - z_0}{2}\right) + A_2\right) \\ = 4B'. \end{array}\right.$$

Mais $(z_1 - z_0)\sin\theta$ est la hauteur du volume compris entre les bases parallèles B, b, dont B' est la section équivalente des bases; donc

$$V = \frac{h}{6}(B + b + 4B').$$

25. Corollaire très important. — L'omniformule s'applique à tout segment compris entre deux bases parallèles, limité latéralement par une surface de second ordre fermée, ou par des surfaces du second ordre donnant un contour latéral fermé et se raccordant suivant des droites ou des coniques.

26. Formule plus générale. — Soit l'aire s donnée par

$$s = A_0z^m + A_1z^{m-1} \ldots + A_{m-1}z + A_m.$$

En raisonnant comme dans le paragraphe précédent, on trouve que le volume engendré par s, quand z varie, depuis $z = z_0$ jusqu'à $z = z_1$, est donné par la formule

$$V = \begin{cases} \left[\dfrac{A_0}{m+1}(z_1^{m+1} - z_0^{m+1}) + \dfrac{A_1}{m}(z_1^{m} - z_0^{m}) \right. \\ \left. + \ldots + \dfrac{A^{m-1}}{2}(z_1^2 - z_0^2) + A_m(z_1 - z_0)\right] \\ \times \sin\theta \end{cases}$$

et pour $m = 2$ on retrouve l'omniformule.

Dans ce cas ($m = 2$) la formule est simple, rapide à appliquer, facile à démontrer élémentairement. Jointe à la formule de Guldin, elle suffit à l'ingénieur, à l'architecte, au constructeur, au mécanicien, etc.; elle condense un grand nombre des formules usuelles et permet de les retrouver facilement. C'est donc l'omniformule qui est importante, et non la formule plus générale, mais peu pratique, qui fait l'objet du présent paragraphe.

27. Remarque relative au tonneau. — C'est par erreur que M. Pujet, dans sa thèse citée dans la note que M. de Longchamps a placée au bas de la première page de ce travail. donne les tonneaux parmi les corps auxquels peut s'appliquer l'omniformule. Elle n'est pas applicable à la cubature des tonneaux; d'abord, parce que ceux-ci n'ont pas une forme géométrique bien définie. Si nous les considérons comme des sommes d'onglets limités par les plans des bases, les plans passant par l'axe et les joints des douves et les surfaces desdites douves, quelle forme attribuerons-nous à ces dernières surfaces?

Si on admet *approximativement* que le tonneau est un volume de révolution, le trapèze générateur est-il limité extérieurement par une chaînette, une parabole ou un arc de cercle?

Admettons cette dernière hypothèse, comme on le fait ordinairement. Alors le volume n'est pas un segment sphérique à bases parallèles, car le centre de l'arc de cercle n'est pas sur l'axe du tonneau. Dans le cas où nous sommes, le volume est engendré par un cercle variable S se mouvant parallèlement à lui-même, perpendiculairement à l'axe *oz* (axe du tonneau), mais on n'a pas l'équation

$$S = Az^2 + Bz + C,$$

équation nécessaire pour que l'omniformule s'applique; voir la démonstration analytique § (24).

On peut consulter à ce sujet le *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse (5e éd., 2e partie, § 769, p. 154). Les auteurs y disent :

« La formule $V = \frac{1}{3}\pi H(2R^2 + r^2)$ (c'est l'omniformule simplifiée dans le cas présent) donne un résultat trop fort. La formule qui s'adapte le mieux à la forme générale des tonneaux est la suivante :

$$V = \frac{1}{3}\pi H\left[2R^2 + 2r^2 - \frac{1}{3}(R^2 - r^2)\right]$$

(*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XLVIII, p. 96.)

» Enfin nous signalerons la formule

$$V = 0{,}525\ D^3$$

qui permet de jauger les tonneaux ordinaires d'une manière très rapide et suffisamment approchée en mesurant seulement la diagonale D qui va du trou de la bonde au point le plus bas de l'un des fonds. »

(A suivre.)

GÉNÉRALITÉS SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

LES POINTS RÉCIPROQUES ET LES POTENTIELS D'ORDRE *p*.

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 109.)

---

7. **Problème I.** — *Sachant trouver le point réciproque d'ordre* p, *construire le point réciproque d'ordre* — p.

Soit **M** (α, β, γ) le point proposé, M' $(\alpha', \beta', \gamma')$ le réciproque de l'ordre p; on a

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^p} = \frac{\beta\beta'}{b^p} = \frac{\gamma\gamma'}{c^p},$$

et l'on suppose que l'on sache déduire, par une certaine construction, effectuée bien entendu avec la règle et le

compas, le point M′ du point M; on propose alors de construire le point M″ (α'', β'', γ'') réciproque de l'ordre — p.

Les coordonnées de M″ vérifient les égalités

$$\frac{\alpha\alpha''}{a^{-p}} = \frac{\beta\beta''}{b^{-p}} = \frac{\gamma\gamma''}{c^{-p}}. \qquad (1)$$

Soit pris le réciproque M_0 (α_0, β_0, γ_0) (sens ordinaire) de M; on a d'abord

$$\alpha\alpha_0 = \beta\beta_0 = \gamma\gamma_0. \qquad (2)$$

D'autre part, si l'on construit le réciproque d'ordre p de M_0, on obtient un point M″ (α'', β'', γ'') et l'on a

$$\frac{\alpha''\alpha_0}{a^p} = \frac{\beta''\beta_0}{b^p} = \frac{\gamma''\gamma_0}{c^p}. \qquad (3)$$

Enfin, soit M_0'' (α_0'', β_0'', γ_0'') le réciproque (sens ordinaire) de M″, on peut écrire

$$\alpha''\alpha_0'' = \beta''\beta_0'' = \gamma''\gamma_0''. \qquad (4)$$

Les égalités (2), (3) et (4) donnent

$$\frac{\alpha\alpha_0''}{a^{-p}} = \frac{\beta\beta_0''}{b^{-p}} = \frac{\gamma\gamma_0''}{c^{-p}}.$$

Finalement le point M_0'' est le réciproque d'ordre — p du point donné M. Pour l'obtenir on voit, en résumé, qu'il faut :

1° Prendre le réciproque M_0 de M,

2° Le réciproque M″ d'ordre p de M_0,

3° Le réciproque M_0'' de M″;

le point M_0'' ainsi obtenu est le réciproque d'ordre — p de M.

Il résulte de cette première observation que si l'on sait construire les points réciproques correspondant à des valeurs positives de p, on saura, par cela même, trouver ceux qui correspondent à des valeurs négatives de p.

8. Problème II. — *Sachant construire le réciproque* M *de l'ordre* p, *obtenir celui de l'ordre* p + 2.

Les notations précédentes étant conservées, nous avons d'abord

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^p} = \frac{\beta\beta'}{b^p} = \frac{\gamma\gamma'}{c^p}. \qquad (1)$$

Prenons M′ (α_0', β_0' γ_0') réciproque de M′; nous avons aussi

$$\alpha'\alpha_0' = \beta'\beta_0' = \gamma'\gamma_0'. \qquad (2)$$

Considérons maintenant le point M″(α'', β'' γ''), inverse de

M'_0 (ou réciproque du deuxième ordre, comme on voudra l'appeler); les relations

$$\frac{\alpha'_0\alpha''}{a^2}=\frac{\beta'_0\beta''}{b^2}=\frac{\gamma''\gamma'_0}{c^2},$$

combinées avec (1) et (2), donnent

$$\frac{\alpha\alpha''}{a^{p+2}}=\frac{\beta\beta''}{b^{p+2}}=\frac{\gamma\gamma''}{c^{p+2}}.$$

Ainsi, pour obtenir le point réciproque de l'ordre $p+2$, on prendra:

1° Le réciproque M' d'ordre p du point donné M,

2° Le réciproque M'_0 (sens ordinaire) de M',

3° L'inverse M'' (ou réciproque du deuxième ordre) de M'_0; le point M'' auquel conduit cette construction est le point cherché.

9. Problème III. — *Construire la réciproque* M_p *d'un ordre quelconque* p, *positif ou négatif, correspondant à un point donné* M.

Comme l'on sait construire directement les réciproques des trois premiers ordres (0, 1, 2,) on pourra donc, par application de la construction précédente, obtenir successivement:

1° Les points réciproques d'ordre 0, 2, 4, ...; 2° en partant des réciproques du premier ordre, les réciproques d'ordre 1, 3, 5 ..., etc. (*).

Le problème I ayant ramené le cas des exposants négatifs à celui des exposants positifs, on peut conclure de ce qui précède que les points réciproques d'un ordre quelconque, pair ou impair, positif ou négatif, peuvent être obtenus par le tracé, relativement simple, que nous venons de faire connaître.

10. Points adjoints. — Considérons un point M dont

(*) On trouvera d'autres solutions de ce problème: l'une de M. d'Ocagne (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. II, p. 497); l'autre de M. Boubals (*Journal*, 1885, p. 31). — Voyez aussi : un mémoire de M. Brocard: ETUDE D'UN NOUVEAU CERCLE DU PLAN D'UN TRIANGLE (*Annuaire de l'Association Française*, Congrès d'Alger, 1881, p. 150); et *Journal de M. S.*, 1883, p. 74, un article de M. Lemoine: QUELQUES THÉORÈMES.

les coordonnées α, β, γ vérifient les relations

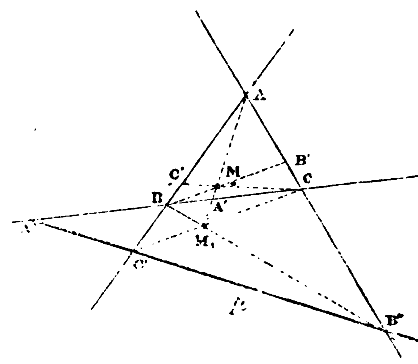
$$\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{C};$$

M. Lemoine appelle points associés (*) et nous nommons ici *points adjoints* ceux dont les coordonnées se déduisent de celles du point M en donnant aux dénominateurs, dans les formules précédentes, des signes différents.

A un point donné M correspondent seulement trois points adjoints M_1, M_2, M_3 dont les coordonnées se calculent par les formules :

$$\frac{\alpha_1}{-A}=\frac{\beta_1}{B}=\frac{\gamma_1}{C},$$
$$\frac{\alpha_2}{A}=\frac{\beta_2}{-B}=\frac{\gamma_2}{C},$$
$$\frac{\alpha_3}{A}=\frac{\beta_3}{B}=\frac{\gamma_3}{-C}.$$

Si l'on prend un point M et que l'on fasse la construction qu'indique la figure (C″ étant le conjugué harmonique de C′, par rapport à AB; et, de même B″ le conjugué de B′, par rapport à AC), les droites BB″, CC″ concourent sur AM en un point M_1 qui est le premier point adjoint.



On déduit donc très simplement, d'un point donné M, ses points adjoints M_1, M_2, M_3.

11. Droite et point harmoniquement associés. — Les trois points A″, B″, C″ qui sont considérés dans la construction précédente sont situés sur une droite μ. Le point

---

(*) Voyez Journal, 1885, p. 193. Le qualificatif *associé* étant trop générique, il me paraît préférable de désigner les points dont il est ici question par l'expression *points algébriquement adjoints*, ou, plus brièvement encore, par celle de *points adjoints* au point donné M.

M et la droite μ sont deux éléments harmoniquement associés, suivant l'expression que nous avons proposée (*).

A un point M (α, β, γ)

$$\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{C},$$

correspond une droite μ, harmoniquement associée à ce point, et l'équation de μ est

$$\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}=0.$$

12. Points complémentaires (**) **et anti-complémentaires.** — A un point M (α, β, γ)

$$\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{C},$$

correspond toujours un point M' (α', β', γ') au moyen des formules

$$\frac{\alpha'}{B+C}=\frac{\beta'}{C+A}=\frac{\gamma'}{A+B}.$$

On déduit facilement de ces formules que le point complémentaire M' se déduit du point donné M, en joignant M au centre de gravité E du triangle de référence et en prolongeant cette droite d'une longueur moitié moindre.

Une autre transformation résulte des formules

$$\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{C}, \qquad (1)$$

$$\frac{\alpha''}{B+C-A}=\frac{\beta''}{C+A-B}=\frac{\gamma''}{A+B-C}. \qquad (2)$$

Le point M'' qui correspond aux égalités (2) est l'anticomplémentaire de M, et l'on vérifie sans peine, pour légitimer cette expression, que M est, en effet, le complémentaire de M''.

Application. — Pour montrer, sur un seul exemple, l'uti-

(*) Voyez *Journal*, p. 103.

(**) L'idée des points complémentaires a été produite récemment par M. Hain (*Archiv der Mathematik und Physik* von Grunert, octobre 1885, p. 214). Celle des points anti-complémentaires n'a pas été donnée par M. Hain, mais elle est la conséquence très naturelle de la première.

lité de ces considérations, prenons les réciproques des points de Brocard.

Ces points O_0, O'_0 ont pour coordonnées

$$b^2, \quad c^2, \quad a^2;$$
$$c^2, \quad a^2, \quad b^2;$$

par suite, le point ω milieu de $O_0O'_0$ est représenté par

$$b^2 + c^2, \quad c^2 + a^2, \quad a^2 + b^2,$$

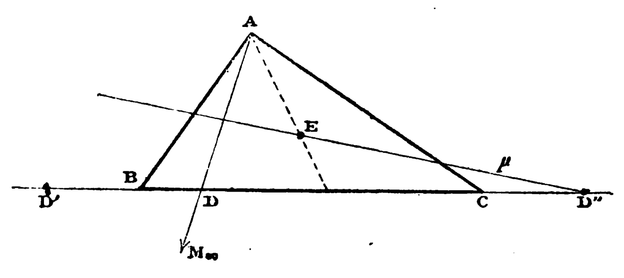
d'où l'on conclut que ω est le complémentaire du point de Lemoine K. La droite Kω étant partagée par le centre de gravité E dans le rapport de 2 à 1, on peut énoncer la propriété suivante : *Le point de Lemoine et les réciproques des points de Brocard ont le même centre de gravité que le triangle de référence* (*).

13. Point associé à l'infini. — L'idée des points complémentaires conduit encore très naturellement à la suivante.

Imaginons un point M (A, B, C) et associons-lui un point M_∞ dont les coordonnées soient

$$B - C, \quad C - A, \quad A - B.$$

Ce point M_∞ est évidemment à l'infini puisque la somme



de ses coordonnées barycentriques est nulle ; pour ce motif nous dirons qu'il est le point de l'infini, associé à M ; ou, plus brièvement, qu'il est *l'associé à l'infini*.

Nous devons montrer maintenant comment, d'un point donné M, on déduit son associé à l'infini.

A cet effet, considérons la droite μ qui joint le centre de

(*) M. Neuberg, d'après une communication qu'il m'a faite, est arrivé, de son côté, à cette propriété.

gravité E au point M; son équation est

$$\alpha(B - C) + \beta(C - A) + \gamma(A - B) = 0.$$

Prenons la transversale réciproque

$$\frac{\alpha}{B - C} + \frac{\beta}{C - A} + \frac{\gamma}{A - B} = 0,$$

puis le point harmoniquement associé à cette dernière droite

$$\frac{\alpha}{B - C} = \frac{\beta}{C - A} = \frac{\gamma}{A - B};$$

ce point est précisément M^{∞}.

Dans la figure ci-dessus, D″ et D′ sont deux points isotomiques sur BC et D est le conjugué harmonique de D′ relativement à BC. On obtient ainsi une droite AD et, par une construction semblable, deux droites analogues qui sont parallèles. Elles concourent, à l'infini au point que nous représentons par M_{∞}.

(A suivre.)

QUESTIONS DIVERSES D'EXAMENS

10. — *Résoudre et discuter l'équation*

$$\frac{a^2}{x - p} + \frac{b^2}{x - q} = 1. \qquad (1)$$

(Baccalauréat; juillet 1885.)

En développant cette équation, l'examen de la quantité U placée sous le radical prouve que celle-ci peut se mettre sous la forme

$$U = (p - q + a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2.$$

Ainsi les racines sont toujours réelles; mais on arrive bien plus rapidement à cette conclusion par la *méthode des substitutions*, qui est aujourd'hui familière aux élèves d'élémentaires. Bornée au second degré, cette méthode enseigne que si deux substitutions α, β donnent des résultats de signes contraires, les racines sont réelles : l'une étant nécessairement comprise dans l'intervalle (α, β); l'autre étant, au contraire, située hors de cet intervalle.

Dans tous les cas, l'équation étant

$$ax^2 + 2bx + c = 0,$$

la suite $\quad -\infty, \quad -\frac{b}{a}, \quad +\infty$

sépare avec certitude les racines de l'équation.

Revenons à l'exemple proposé, écrivons l'équation (1) sous forme entière, si nous voulons éviter la discontinuité de la fonction, et, dans la relation

$$a^2(x-q) + b^2(x-p) - (x-p)(x-q) = 0,$$

substituons

$$-\infty \quad p \quad q \quad +\infty \;.\; (p < q).$$

Nous avons le tableau suivant :

$$-, \quad a^2(p-q), \quad b^2(q-p), \quad -;$$

c'est-à-dire

$$-, \quad -, \quad +, \quad -.$$

Les racines sont réelles et séparées.

Remarque. — La méthode très connue que nous venons d'employer est utilisée dans de nombreux exemples. On connaît notamment son application à l'équation

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0,$$

qui a ses racines réelles, propriété qui appartient d'ailleurs à toutes les équations de la forme

$$\sum \frac{1}{x-a} = 0.$$

Mais voici un exemple qui est peut-être moins classique.

Considérons l'équation

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{\alpha}{x-c} = 0, \qquad (1)$$

et supposons $a < b < c$, ou $a > b > c$ indifféremment ; dans ce cas, l'équation a ses racines réelles. On le reconnaît immédiatement en faisant varier x de $a + \varepsilon$ à $b - \varepsilon$, ε étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra ; ou, si l'on préfère, en substituant successivement a et b, dans l'équation (1) mise sous forme entière.

On obtient ainsi les résultats :

$$(a-b)(a-c), \qquad (b-a)(b-c)$$

dont le produit est égal à

$$(a-b)^2(a-c)(c-b).$$

Ce produit étant négatif, dans l'hypothèse que nous avons faite, nous voyons donc qu'il existe une racine dans l'intervalle (a, b) ; ainsi, l'équation a ses racines réelles.

Le calcul vérifie bien entendu le résultat précédent, et l'on trouve que la quantité soumise au radical, mise sous la forme

$$4(c-a)(c-b)+(a-b)^2(\alpha+1)^2,$$

est essentiellemeni positive, quand c n'est pas compris dans l'intervalle (a, b). *(A suivre.)*

CORRESPONDANCE

Je vous envoie la traduction que j'ai faite d'un article anglais paru dans le journal *The Educational Times.* — Cet article est intitulé : *Proof of the Rule for the composition of two parallel forces,* by J. Walmsley (Preuve de la règle de composition de deux forces parallèles, par J. Walmsley). L'auteur expose une *nouvelle* vérification de la construction ordinaire employée pour obtenir la résultante de deux forces parallèles dirigées dans le même sens ou en sens contraires. Voici quelle est la preuve qu'il en donne :

Soient P et Q les deux forces données. Joignons A et B, points d'application de ces deux forces parallèles et divisons la ligne AB en deux parties BC et CA telles que nous ayons $\frac{BC}{CA}=\frac{P}{Q}$ (le point C doit être toujours plus rapproché de P, la plus grande force, que de Q). Menons par le point C la ligne ER ou CR parallèle aux directions de P et de Q. Prenons CE = Q, CR = P, puis menons les lignes EA, AR, RB. Il nous est alors facile de prouver que EA est parallèle à BR. En effet, dans l'une et l'autre figure, les triangles AEC

Fig. 1.

et RCB sont semblables. Ils ont leurs angles en C égaux, et de plus ces angles sont compris entre des côtés proportionnels puisque, d'après la construction que nous avons faite précédemment, nous avons $\frac{BC}{CA} = \frac{RC}{EC} = \frac{P}{Q}$. Les triangles AEC et RCB, étant semblables, sont aussi *équiangles*. On conclut de là l'égalité des angles $\widehat{AEC}$ et $\widehat{CRB}$. Or, dans la première figure, ces angles occupent la position d'angles alternes-internes par rapport aux deux lignes AE et BR coupées par la sécante ER, leur égalité prouve le *parallélisme* de ces lignes AE et BR. Dans la 2e figure les angles $\widehat{AEC}$ et $\widehat{CRB}$ occupent la position d'angles correspondants par rapport aux lignes AE et BR coupées par la sécante CR; de leur égalité on déduit le *parallélisme* de AE et de BR. Alors CR dans le triangle ACR peut représenter P en A, et EC dans le triangle ACE peut représenter Q en B. Donc, à l'aide de ces triangles nous pourrons remplacer P en A, par CA et AR en A; et Q en B, par EA et AC en B. Mais AC en B et CA en A se font équilibre; les forces primitives sont donc équivalentes à AR en A et AE en B, la dernière de ces forces doit, en réalité, agir suivant BR *(fig. 1)* ou RB *(fig. 2)*. Mais ces forces par le principe de la *transmissibilité* peuvent être prises comme agissant en R. Leur résultante est alors ER, le troisième côté du triangle EAR. Cette résultante peut se transporter en C. Il est facile de tirer de là les conclusions ordinaires pour les forces égales ou inégales, et d'en déduire la méthode graphique employée pour la détermination de la résultante.

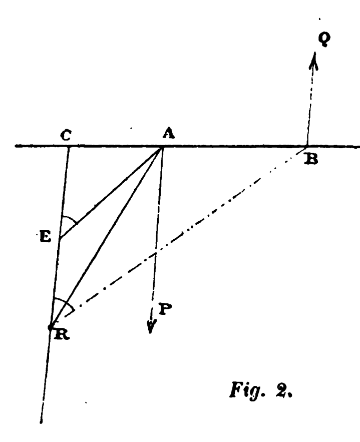


Fig. 2.

(Traduit du journal anglais *The Educational Times*, par M. Edmond Bordage, professeur au collège de Nantua.)

SUR LA CONSTRUCTION DE π.

M. Ferdinand Bretschneider d'Eisenstadt a indiqué, dans le dernier numéro des *Archives de Grunert* (*), une construction assez simple pour obtenir une valeur approchée du nombre π.

On sait, dit M. Bretschneider, que l'expression

$$\frac{7}{10^7} + \frac{13\sqrt{146}}{50}$$

représente le nombre π avec *neuf* décimales exactes,

Si l'on prend seulement la partie

$$\frac{13\sqrt{146}}{50} = 3{,}14159\ldots$$

on obtient π avec *cinq* décimales seulement; mais cette approximation suffit dans la plupart des cas,

En observant que

$$146 = \overline{11}^2 + \overline{5}^2,$$

on est ainsi conduit à construire une ligne x, telle que

$$\frac{x}{13} = \frac{\sqrt{\overline{11}^2 + \overline{5}^2}}{50}. \qquad (1)$$

Voici, il nous semble, la meilleure façon d'utiliser cette remarque de M. Bretschneider.

Prenons une circonférence de rayon quelconque, mais dont un diamètre AB a été partagé en dix parties égales et portons, comme l'indique la figure, sur le prolongement de AB trois de ces divisions, ce qui donne les points C et D.

Soit OE le rayon perpendiculaire à AB; les tangentes en A et E se coupent en M; du point M, avec MC pour rayon, décrivons un arc de cercle (**) qui rencontre MA en R; enfin

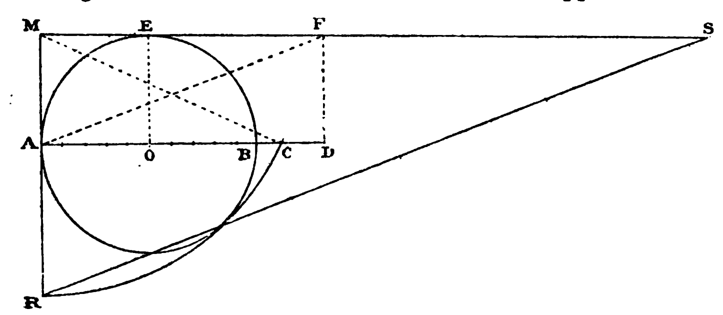
(*) *Archiv der Mathematik und Physik, 1886,* p. 447.

(**) Cet arc de cercle est très légèrement extérieur au cercle proposé, parce que l'on a

$$\sqrt{146} > 5 + \sqrt{50},$$

mais la différence de deux nombres $\sqrt{146}$, $5 + \sqrt{50}$ est très faible; elle est à peu près égale à $\frac{1}{100}$.

complétons la construction comme l'indique la figure, RS étant une droite parallèle à AF ; je dis que MS représente la longueur de la circonférence, avec une approximation



égale à celle qu'on obtient en faisant le calcul de cette longueur, π étant pris avec cinq décimales exactes.

En effet la proportion (1) peut s'écrire

$$\frac{10x}{13} = \frac{\sqrt{146}}{5} = \frac{\text{MC ou MR}}{\text{MA}} = \frac{\text{MS}}{\text{MF}}.$$

Mais $$\text{MF} = \frac{13}{5}\text{R},$$

on a donc $$\text{MS} = 2\text{R}x.$$

Dans cette formule x représente le nombre π avec cinq décimales exactes et l'on peut dire que, avec l'approximation correspondante, MS est égale à la longueur de la circonférence proposée. On accordera sans doute que, dans la pratique, une pareille approximation est très suffisante. G. L.

ERRATUM

CONCERNANT L'ESSAI SUR LA THÉORIE DES NOMBRES

De Legendre. — An VI (1re édition).

Résolution de l'équation $x^2 - 331y^2 = 1$ *par les plus petits entiers.*

Plus petites valeurs de x et d'y (d'après Legendre)

$$x = 2\ 785\ 589\ 801\ 443\ 969$$
$$y = 153\ 109\ 862\ 634\ 573.$$

RECTIFICATION

Dans la valeur de x, les deux derniers chiffres à gauche forment le nombre 70 et non 69.

VÉRIFICATION

$x^2 =$ 7 759 510 541 908 656 209 097 049 360 900
$y^2 =$ 23 442 630 035 977 813 320 534 892 329
$331y^2 =$ 7 759 510 541 908 656 209 097 049 360 899
et enfin $x^2 - 331y^2 = 1$ (ce qu'il fallait vérifier). J. Ch.

Nota. — M. Chapron qui nous communique cet erratum, l'a rencontré dans l'exemplaire qui se trouve à la bibliothèque Sainte-Geneviève. Il n'est pas impossible, comme il nous l'a fait observer, que la faute signalée ait disparu dans les éditions suivantes. Les deux derniers chiffres 9 et 3, dans les valeurs d'x et d'y données par Legendre, sont manifestement en contradiction avec l'énoncé; puisque, dans cette hypothèse, les deux nombres x^2 et $331y^2$ se terminant respectivement par les chiffres 1 et 9, la différence $x^2 - 331y^2$ ne peut être égale à l'unité.

M. Chapron a refait les calculs de Legendre et a pu rétablir la véritable valeur de x. En nous envoyant cette intéressante rectification M. Chapron ajoute : « J'ai été aidé dans ce travail par le jeune Lefeuvre de l'institution D*...; en quelques minutes, avec les réglettes de MM. Genaille et Lucas, il a vérifié les résultats cherchés. » Nous ne sommes d'ailleurs pas surpris de ce que nous apprend là M. Chapron; nous avons vu fonctionner les réglettes en question au Congrès de Grenoble, au mois d'août dernier; les résultats qu'elles donnent sont tout à fait merveilleux. G. L.

QUESTION 144

Solution par M. Chapron.

Soit ABC *un triangle,* A' *et* A'' *les pieds sur* BC *des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle* A; B' *et* B'', C' *et* C'' *les points analogues sur* AC *et sur* AB; *soient* α' *et* α'' *les symétriques de* A' *et de* A'' *par rapport au milieu de* BC; β' *et* β''

les symétriques de B′ *et de* B″ *par rapport au milieu de* AC ; γ' *et* γ'' *les symétriques de* C′ *et de* C″ *par rapport au milieu de* AB. *Démontrer :*

1° *Que les trois circonférences décrites sur* A′A″, B′B″, C′C″ *comme diamètres ont même axe radical;*

2° *Qu'il en est de même des trois circonférences décrites sur* $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ *comme diamètres;*

3° *Que ces trois dernières circonférences se coupent, se touchent ou ne se coupent pas : suivant que* ABC *est acutangle, rectangle ou obtusangle; lorsqu'elles se touchent, le point de contact est le point symétrique du sommet de l'angle droit par rapport au milieu de l'hypoténuse;*

4° *Lorsqu'elles se coupent, ou se touchent, les distances d'un point d'intersection ou du point de contact sont proportionnelles aux côtés opposés;*

5° *Les axes radicaux des deux groupes de trois circonférences se coupent au centre* O *du cercle circonscrit au triangle* ABC.

(E. Lemoine.)

Je supposerai

$$BC > CA > AB$$

ou

$$a > b > c.$$

Soient M, N, P, μ, ν, π les milieux respectivement de A′A″, B′B″, C′C″, $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$;

Soient A_1, B_1, C_1 les pieds des symédianes sur les côtés BC, AC, AB.

On sait que les trois points A′, C′, B″ sont en ligne droite ainsi que A′, B′, C″. Considérons le quadrilatère complet B′C′B″C″; A′A″ est la troisième diagonale. M est le milieu de A′A″, N celui de la diagonale B′B″, P celui de C′C″; donc M, N, P sont en ligne droite comme μ, ν, π sont respectivement les points isotomiques de M, N, P (d'après la dénomination de M. de Longchamps qui appelle ainsi deux points situés sur un côté à égale distance du milieu de ce côté). Ces points sont aussi en ligne droite.

On peut, du reste, le voir autrement :

Si, par A, on mène une parallèle AX à BC et que l'on appelle I le milieu de BC, les quatre droites AX, AC, AI, AB forment un faisceau harmonique, les symétriques AM, AB, AA_1, AC

de ces quatre droites par rapport à la bissectrice AA′ forment aussi un faisceau harmonique, et, comme les trois droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent en un même point (le point de Lemoine), les conjugués harmoniques M, N. P de A_1, B_1, C_1 par rapport à BC, AC, AB sont en ligne droite; on a alors l'égalité

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1,$$

qui entraîne

$$\frac{\mu C}{\mu B} \cdot \frac{\nu A}{\nu C} \cdot \frac{\pi B}{\pi A} = 1,$$

puisque $MB = \mu C$, etc., c'est-à-dire que μ, ν, π sont en ligne droite.

Cherchons la puissance du centre du cercle circonscrit par rapport au cercle décrit sur A′A″ comme diamètre; on voit qu'elle est la même que la puissance de ce point par rapport au cercle décrit sur $\alpha'\alpha''$ comme diamètre, puisque ces deux cercles sont symétriques par rapport à OI.

Puisque A_1 et M sont conjugués harmoniques par rapport à BC, M est le point où la tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC coupe BC; donc OA et MA sont perpendiculaires et le cercle décrit sur A′A″ comme diamètre coupe orthogonalement en A le cercle circonscrit du triangle ABC; OA est donc tangente en A au cercle décrit sur A′A″ comme diamètre.

Par suite, la puissance du point O par rapport à ce cercle est R^2, et elle est la même par rapport au cercle symétrique décrit sur $\alpha'\alpha''$ comme diamètre et par rapport aux autres cercles décrits sur B′B″, $\beta'\beta''$, C′C″, $\gamma'\gamma''$. L'axe radical des trois circonférences décrites sur A′A″, B′B″, C′C″ comme diamètre et celui des trois circonférences décrites sur $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ sont donc respectivement : la perpendiculaire abaissée de O sur la droite MNP et la perpendiculaire abaissée de O sur la droite $\mu\nu\pi$.

1°, 2° et 5° sont ainsi démontrés.

Cela posé on a
$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{c^2}{b^2},$$

puisque A_1 est le pied de la symédiane ; donc, M étant le con-

jugué harmonique de A_1 par rapport à B et à C.

$$\frac{MB}{MC} = \frac{c^2}{b^2} \quad \text{d'où} \quad MB = \mu C = \frac{ac^2}{b^2 - c^2}.$$

Si R_a, R_b, R_c sont les rayons des circonférences décrites respectivement sur $A'A''$ ou $\alpha'\alpha''$, $B'B''$ ou $\beta'\beta''$, $C'C''$ ou $\gamma'\gamma''$ comme diamètre, on a

$$R_a = \frac{abc}{b^2 - c^2}, \quad R_b = \frac{abc}{a^2 - c^2}, \quad R_c = \frac{abc}{a^2 - b^2},$$

on a facilement aussi

$$\overline{\mu\nu}^2 - (R_a + R_b)^2 = \frac{c^2(a^2 + b^2 + c^2)(c^2 - a^2 - b^2)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)},$$

quantité négative, d'où l'on conclut

$$\mu\nu < R_a + R_b;$$

on a enfin

$$\overline{\mu\nu}^2 - (R_a - R_b)^2 = \frac{c^2(c^2 + b^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)}.$$

Or, puisque nous avons fait l'hypothèse $a > b > c$, le second membre est positif, nul ou négatif suivant que $c^2 + b^2 - a^2$ est positif, nul ou négatif ; c'est-à-dire que ABC est acutangle, rectangle ou obtusangle : on a donc

$$\mu\nu < R_a + R_b \quad \text{et} \quad \mu\nu > R_a - R_b;$$
$$\mu\nu < R_a + R_b \quad \text{et} \quad \mu\nu = R_a - R_b;$$
$$\mu\nu < R_a + R_b \quad \text{et} \quad \mu\nu < R_a - R_b;$$

c'est-à-dire que les circonférences se coupent, sont tangentes ou ne se coupent pas. Si A'_1 est le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit, on voit que lorsque le triangle CAB est rectangle en A, ce point A'_1 appartient aux trois circonférences, c'est-à-dire qu'il est leur point de contact ; il suffit pour cela d'établir que les trois angles $\alpha'A_1'\alpha''$, $\beta'A_1'\beta''$, $\gamma'A_1'\gamma''$ sont droits, ce qui est très facile.

3° est donc démontré.

La circonférence décrite sur $\alpha'\alpha''$ comme diamètre est évidemment le lieu du point M, tel que l'on ait

$$\frac{M_1B}{M_1C} = \frac{b}{c}, \text{ etc.}$$

On a donc, si M_1 est un des deux points communs aux trois circonférences décrites sur $\alpha'\alpha''$; $\beta'\beta''$; $\gamma'\gamma''$ comme diamètre,

$$\frac{M_1A}{a} = \frac{M_1B}{b} = \frac{M_1C}{c}$$

et 4° est démontré.

Remarques (*). — *a*) Les circonférences décrites sur A'A", B'B", C'C" comme diamètre se coupent toujours, et si M_2 est un de leurs points d'intersection on a $\dfrac{M_2A}{\frac{1}{a}} = \dfrac{M_2B}{\frac{1}{b}} = \dfrac{M_2C}{\frac{1}{c}}$.

Elles se coupent toujours, car

$$\overline{MN}^2 - (R_a + R_b)^2 = -\frac{3a^2b^2c^2}{(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)}.$$

Ce qui prouve que $MN < R_a + R_b$ et

$$\overline{MN}^2 - (R_a - R_b)^2 = \frac{a^2b^2c^2}{(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)},$$

ce qui prouve que $MN > R_a - R_b$.

b) La droite MNP axe d'homologie du triangle ABC et du triangle $A_1B_1C_1$ formé par les pieds des symédianes, est parallèle à la droite qui joint les points de Brocard du triangle ABC et, par suite, l'axe radical des circonférences décrites sur A'A", B'B", C'C" comme diamètre passe aussi par le point de Lemoine; c'est la ligne qui joint le point de Lemoine au centre du cercle circonscrit; la puissance du point de Lemoine par rapport à l'une de ces trois circonférences est $\dfrac{-3a^2b^2c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$.

c) L'axe radical des circonférences décrites sur $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ comme diamètre passe aussi au point de concours des hauteurs, c'est donc la droite qui joint ce point au centre du cercle circonscrit; la puissance du point de concours des hauteurs par rapport à l'une de ces circonférences est $4R^2$.

d) Les lecteurs qui connaissent l'emploi des coordonnées homogènes pourront vérifier que ces axes radicaux ont respectivement pour équations :

$$\alpha \cdot \frac{b^2 - c^2}{a} + \beta \cdot \frac{c^2 - a^2}{b} + \gamma \cdot \frac{a^2 - b^2}{c} = 0;$$

(*) Ces remarques diverses nous ont été adressées par M. Em. Lemoine.

et

$$\alpha.(b^2-c^2)\cos A+\beta.(c^2-a^2)\cos B+\gamma.(a^2-b^2)\cos C=0.$$

e) Voici une autre démonstration de 1° et de 2°.

Supposons d'une façon générale que A'_1 et A''_1 soient deux points conjugués harmoniques quelconques par rapport à C et à B; soit M_1 le milieu de $A'_1B''_1$, J le milieu de CB. La puissance de O, centre du cercle circonscrit par rapport au cercle décrit sur $A'_1A''_1$ comme diamètre, est $\overline{OM}_1^2-\overline{M_1A'}^2$ ou $\overline{OJ}^2+\overline{JM}_1^2-\overline{M_1A'}^2$ ou $OJ^2+(JM_1-M_1A')(JM_1+M_1A')$ ou $OJ^2+JA'\,.\,JA''$ ou (puisque A',A'' étant conjugués harmoniques on a $JA'\,.\,JA''=\overline{BJ}^2$) $OJ^2+\overline{JB}^2=R^2$. Cette puissance est donc constante, et nous pouvons dire d'après cela que les trois circonférences décrites sur $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ ont en O un point qui a même puissance par rapport à chacune d'elles, et par suite qu'elles ont même axe radical passant par ce point.

Même démonstration pour les trois circonférences décrites sur $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ comme diamètre.

Si l'on considère le quadrilatère qui a pour côtés successifs $B'A''$, $A''B''$, $B''A'$, $A'B'$, les trois diagonales sont $B'B''$, $A'A''$, $C'C''$ et forment le triangle ABC, et l'on sait que dans tout quadrilatère complet les circonférences décrites sur les trois diagonales comme diamètre ont même axe radical; on voit donc qu'une partie du théorème proposé revient à celui-là, mais ce qui précède permet d'ajouter la proposition suivante: *L'axe radical commun des trois circonférences décrites sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet comme diamètres passe par le centre du cercle circonscrit au triangle formé par ces trois diagonales.*

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 12466 6.

PROBLÈME DE MÉCANIQUE

Par M. **Éd. Guillet,** professeur au Lycée d'Avignon.

(*Suite*, voir p. 121).

Disposition remarquable des foyers et des sommets. — Menons les droites parallèles B′Q′, B″Q″... faisant avec la verticale l'angle 2α, comme BC.

Nous savons que la droite AF est perpendiculaire sur BC. Or, dans le cercle de centre B′ et de rayon B′F, l'angle Q′B′F est égal à $QB'K' + 2K'B'T$, c'est-à-dire à

$$2\alpha + 2(\alpha' - \alpha) = 2\alpha';$$

donc

$$Q'B'F = 2\alpha';$$

de même

$$Q'B'F' = 2K'B'C' - K'B'Q,$$

c'est-à-dire

$$Q'B'F' = 2\alpha'.$$

Les deux arcs Q′F et Q′F′ sont donc égaux et, par suite, la corde FF′ est perpendiculaire sur B′Q′.

On ferait voir de la même façon que la corde F′F″ du cercle de centre B″ et du rayon B″F′ est perpendiculaire à la droite B″Q″, et ainsi de suite pour les autres paraboles.

Les cordes AF, FF′, F′F″... étant à la suite les unes des autres et perpendiculaires à des droites parallèles BC, B′Q′, B″Q″... forment une seule et même ligne droite.

Ainsi *les foyers de toutes les paraboles sont sur une droite, faisant avec l'horizon l'angle 2α, double de celui du plan incliné, et passant par le point de départ de la sphère.*

Les droites DS, D′S′, D″S″... étant toutes divisées en leurs milieux par les sommets S, S′ S″... il en résulte que *les sommets sont eux-mêmes sur une ligne droite partant du point* A.

D'ailleurs le point A peut être considéré lui-même comme foyer, sommet et pied de la directrice de la parabole AB qui

se réduit à une droite double. Pour avoir cette droite double, il suffirait de supposer que la sphère a été d'abord lancée verticalement du point B et de bas en haut avec la vitesse initiale

$$v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Isochronisme des bonds. — Désignons par t_0 le temps employé par la sphère lancée du point B verticalement de bas en haut, avec la vitesse initiale v_0 définie par la formule (1), pour revenir au point de départ ; désignons de même par t_1 la durée du premier bond, par t_2 celle du second, par t_3 celle du troisième et ainsi de suite.

On sait que le temps t employé pour atteindre le point le plus élevé A est déterminé par la formule

$$v = v_0 - gt$$

dans laquelle on fait $v = 0$, ce qui donne :

$$t = \frac{v_0}{g}.$$

D'ailleurs le temps de la chute est égal à celui de l'ascension ; on aura donc

$$t_0 = \frac{2v_0}{g}.$$

Nous avons trouvé aussi

$$t_1 = t_2 = \frac{2v_0}{g}.$$

On passe de t_2 à t_3 en remplaçant dans la formule

$$t_2 = \frac{2v_1}{g} = \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}$$

v_1 par v_2 et α' par α'', et on aurait t_n par la formule

$$t_n = \frac{2v_{n-1}}{g} \cdot \frac{\cos\alpha_{n-1}}{\cos\alpha}.$$

Or

$$\left\{\begin{aligned} v_{n-1} &= v_0\sqrt{1 + 4(n-1)n\sin^2\alpha} \\ \cos\alpha_{n-1} &= \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 + 4(n-1)n\sin^2\alpha}} \end{aligned}\right.$$

Donc

$$t_n = \frac{2v_0}{g}.$$

On a donc, en résumé :

$$t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = \ldots = t_n \ldots$$

En particulier, si l'on fait

$$\frac{2v_0}{g} = 1,$$

d'où

$$v_0 = 4^{m},9044$$

et

$$h = 1^{m},2261,$$

c'est-à-dire que si on lance verticalement la sphère de bas en haut avec une vitesse initiale de $4^{m},9044$ ou si on la laisse tomber d'une hauteur de $1^{m},2261$ au-dessus du plan incliné, cette sphère reviendra toucher le plan après chaque seconde, et cela quelle que soit l'inclinaison α du plan.

Loi de progression de la projection horizontale de la vitesse. — On a vu que pendant chaque bond, la projection horizontale de la vitesse est constante. Les durées $t_1, t_2, t_3 \ldots t_n$ étant égales et les amplitudes ... $A_1A_2 \ldots A_n$ comme la suite naturelle des nombres entiers 1, 2, 3 ... n, il en résultera qu'en désignant par $v_{x0}, v_{x1}, v_{x2}, v_{x3} \ldots$ les projections horizontales de la vitesse pour la 1e, la 2e, la 3e ... parabole, on aura :

$$v_{x1} = 2v_{x0},$$
$$v_{x2} = 3v_{x0} \ldots \text{etc.}$$

Les vitesses horizontales suivent donc la loi de progression des nombres entiers, comme les amplitudes.

On peut encore le vérifier sur les expressions que nous avons trouvées pour $v_{x0}, v_{x1}\ v_{x2} \ldots$

$$\left\{\begin{array}{l} v_{x0} = v_0 \ \sin 2\alpha \\ v_{x1} = v_1 \ \sin(\alpha + \alpha') \\ v_{x2} = v_2 \ \sin(\alpha + \alpha'') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{xn-1} = v_{n-1} \sin(\alpha + \alpha_{n-1}). \end{array}\right.$$

On a d'ailleurs :

$$v_{n-1} = v_0\sqrt{1 + 4(n-1)n \sin^2\alpha}$$
$$\sin(\alpha + \alpha_{n-1}) = \sin\alpha \cos\alpha_{n-} + \cos\alpha \sin \alpha_{n-1}.$$

D'autre part, nous avons déjà trouvé

$$\left\{\begin{aligned} \sin \alpha_{n-1} &= \frac{(2n-1)\sin\alpha}{\sqrt{1+4(n-1)n\sin^2\alpha}} \\ \cos \alpha_{n-1} &= \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+4(n-1)n\sin^2\alpha}}, \end{aligned}\right.$$

on a donc :

$$\sin(\alpha+\alpha_{n-1}) = \frac{2n\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1+4(n-1)n\sin^2\alpha}}$$

et comme

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha,$$

il vient enfin

$$v_{xn-1} = nv_{x0}.$$

(A suivre.)

L'OMNIFORMULE DE CUBATURE

Par M. **Casimir Rey** (*).

(*Suite*, voir p. 124.)

NOTES DIVERSES

28. Note I (voir § 16 et fig. 9). — Soit un volume V limité par des fuseaux cylindriques circonscrits à l'hémisphère de rayon r et par le plan servant de base à l'hémisphère.

Sa hauteur est r et sa base est le polygone d'aire B circonscrit au grand cercle qui sert de base à l'hémisphère.

Après réductions, l'omniformule donne

$$V = \frac{2}{3} r \times B, \qquad (1)$$

d'une part.

De l'autre, si on appelle S la somme des aires des fuseaux, on voit facilement que le volume a pour mesure cette surface S multipliée par le tiers du rayon, d'où

$$V = \frac{S \times r}{3}. \qquad (2)$$

En éliminant V entre (1) et (2), on obtient l'expression remarquable

$$S = 2B,$$

fort utile pour l'évaluation des voûtes en arc de cloître en plein cintre.

Pour B carré, $S = 8r^2$.

D'une façon générale, si un volume V peut être évalué à la fois par l'omniformule et par une fonction simple de la surface latérale S, en égalant les deux valeurs de V, on obtient une expression simple de la surface latérale.

On retrouverait ainsi l'expression de la surface de la sphère, etc.

29. Note II (voir § 21, fig. 12). — *Si on coupe un hyperboloïde et son cône asymptote par des plans parallèles donnant lieu à des couronnes elliptiques, ces couronnes ont la même aire.*

Considérons les deux couronnes FF'DD'; GG'EE.

Nous aurons

$$\frac{\text{aire ellipse FF}'}{\text{aire ellipse DD}'} = \frac{CF^2}{CD^2}$$

car ces deux ellipses sont semblables; donc

$$\frac{\text{aire couronne FF}'\text{DD}'}{\text{aire ellipse FF}'} = \frac{CF^2 - CD^2}{CF^2}$$

$$\text{ou aire couronne FF}'\text{DD}' = \frac{\text{aire ellipse FF}'}{CF^2} \times (CF^2 - CD)^2.$$

De même

$$\text{aire couronne GG}'\text{EE}' = \frac{\text{aire ellipse GG}'}{G'G^2} \times (C'G^2 - C'E^2).$$

Les seconds membres de ces égalités sont égaux parce que

$$\frac{\text{aire ellipse FF}'}{CF^2} = \frac{\text{aire ellipse GG}'}{C'G^2}$$

les deux ellipses étant semblables.

D'ailleurs

$$CE^2 - CD^2 = F'D \times DF$$

et

$$C'G^2 - C'E^2 = G'E \times EG$$

sont des quantités égales d'après le théorème de Newton

relatif au produit des segments des cordes parallèles compris entre les asymptotes et les branches de l'hyperbole.

On en conclut

aire couronne FF'DD' = aire couronne GG'EE'.

30. Note III. Formule de Simpson pour les aires (voir § 24). — Cette formule de quadrature se déduit facilement de l'*omniformule* dans laquelle on remplace B, *b*, B' par (y_0, y_2, y_1), puis par (y_2, y_4, y_3), etc.

Soit

$$y = A_0z^2 + A_1z + A_2.$$

La primitive de y par rapport à z est

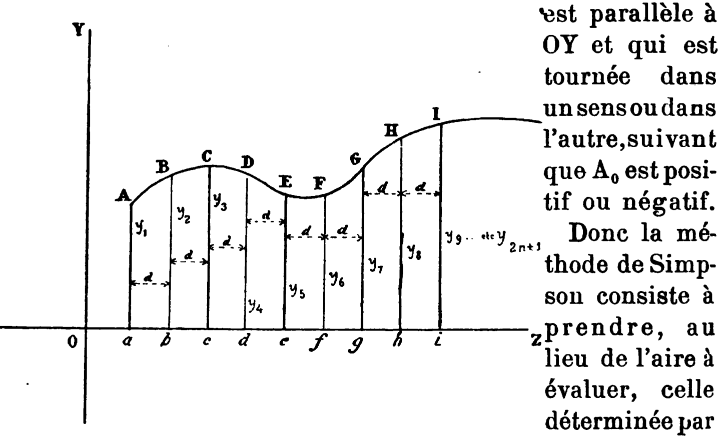
$$\frac{A_0z^3}{3} + \frac{A_1z^2}{2} + A_2z$$

et un raisonnement identique à celui du § 24 (en y remplaçant *s* par *y*) donne

$$\text{aire ACca} = \frac{ac}{6}(y_1 + 4y_2 + y_3) = \frac{d}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3)$$

$$\text{aire CEec} = \frac{ce}{6}(y_3 + 4y_4 + y_5) = \frac{d}{3}(y_3 + 4y_4 + y_5) \text{ etc.}$$

$y = A_0z^2 + A_1z + A_2$ représente une parabole dont l'axe est parallèle à OY et qui est tournée dans un sens ou dans l'autre, suivant que A_0 est positif ou négatif.



Donc la méthode de Simpson consiste à prendre, au lieu de l'aire à évaluer, celle déterminée par des arcs successifs de paraboles dont les axes sont parallèles à OY.

Chaque arc de parabole, l'arc ABC par exemple, a ses trois ordonnées A*a*, B*b*, C*c* équidistantes, et les coordonnées des trois points A, B, C déterminent les valeurs A_0, A_1, A_2 des trois paramètres de la parabole à laquelle ils appartiennent.

(A suivre.)

THÉORÈMES
SUR LES INTERSECTIONS D'UN CERCLE ET D'UN TRIANGLE
D'APRÈS M. H. M. TAYLOR, M. A.

Par M. **Émile Vigarié,** élève de l'École des Mines.

(*Suite,* voir p. 106.)

---

5. — Les autres questions exigeant une démonstration qui ne peut être donnée dans la partie élémentaire de ce journal, nous nous contenterons d'indiquer les résultats :

Le lieu du centre du cercle $\alpha\beta\gamma$ *est une ligne droite* dont l'équation en *coordonnées barycentriques* est

$$\frac{x}{a}\sin(\alpha-\alpha')+\frac{y}{b}\sin(\beta-\beta')+\frac{z}{c}\sin(\gamma-\gamma')=0 \quad (5)$$

Les distances du centre (α, β, γ) aux côtés de ABC sont :

$$\left.\begin{aligned}\delta_a &= r\cos(\beta-\theta)\\ \delta_b &= r\cos(\gamma-\alpha+C-\theta)\\ \delta_c &= r\cos(\alpha+\gamma-B-\theta)\end{aligned}\right\}. \quad (6)$$

Dans le triangle ABC on peut inscrire un triangle minimum semblable à $\alpha\beta\gamma$, les distances du centre du cercle circonscrit à ce triangle aux côtés de ABC sont :

$$\left.\begin{aligned}\delta'_a &= \frac{R}{L^2\sin A}\left(\frac{\sin\beta\sin\beta'}{\sin B}+\frac{\sin\gamma\sin\gamma'}{\sin C}\right)\\ \delta'_b &= \frac{R}{L^2\sin B}\left(\frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin A}+\frac{\sin\gamma\sin\gamma'}{\sin C}\right)\\ \delta'_c &= \frac{R}{L^2\sin C}\left(\frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin A}+\frac{\sin\beta\sin\beta'}{\sin B}\right)\end{aligned}\right\}. \quad (7)$$

6. — *L'enveloppe de chaque côté du triangle* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma$ *est une parabole qui touche deux côtés du triangle* ABC.

Ainsi l'enveloppe de $\beta\gamma$ est une parabole tangente à AB et à AC.

7. — *L'enveloppe du cercle* $\alpha\beta\gamma$ *est une conique.*

Le centre de cette conique est le centre du cercle circonscrit au triangle minimum; les distances du centre de la conique aux côtés du triangle ABC sont donc données par les formules (7). Les axes de la conique sont :

$$r_1 \quad \text{et} \quad r_1 \sqrt{1 - \frac{\sin(\beta - \theta_1)}{\sin^2 \varphi}}$$

r_1 est le rayon du cercle circonscrit au triangle minimum, θ_1 la valeur de θ qui rend le rayon minimum et φ l'angle que fait la droite (5), lieu du centre du cercle $\alpha\beta\gamma$, avec BC.

Ces quelques propositions étant établies, nous pourrons en tirer des propriétés des principaux cercles remarquables du plan d'un triangle.

8. Tous les théorèmes précédents peuvent être démontrés plus simplement, sans calculs, grâce à une note de M. Neuberg (*) qui a pour objet de préciser et de compléter les relations données par M. H. Taylor en les rattachant à la théorie des figures semblablement variables et à celle des podaires obliques d'un foyer d'une conique.

Nous allons en terminant cette note indiquer les nouveaux résultats donnés par M. Neuberg.

Si un triangle $\alpha\beta\gamma$, variable sous les conditions de rester constant de forme, est inscrit dans un triangle donné ABC, les cercles circonscrits aux triangles $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$, se coupent en un même point F fixe par rapport à ABC et par rapport au triangle mobile $\alpha\beta\gamma$; donc :

Lorsqu'un triangle $\alpha\beta\gamma$ *reste semblable à lui-même et inscrit dans un triangle fixe* ABC, *il existe un point du triangle mobile qui est fixe; ce point est celui d'où l'on voit les côtés de* $\alpha\beta\gamma$ *sous*

(*) Cette note est insérée dans les « *Proceedings of the London Math. Society*, vol. XVI, n° 224 (12 février 1885). Elle a pour titre : « *Sur les figures semblablement variable*

des angles supplémentaires de ceux de ABC, *et les côtés de* ABC *sous des angles respectivement égaux aux sommes des angles correspondants des deux triangles* (*).

Le point F est un *centre permanent de similitude* du triangle $\alpha\beta\gamma$.

Si on mène FM, FN, FP perpendiculaires à BC, CA, AB, le triangle MNP est une position particulière du triangle $\alpha\beta\gamma$: c'est le minimum de $\alpha\beta\gamma$.

Les côtés $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ *du triangle* $\alpha\beta\gamma$ *enveloppent trois paraboles touchant deux côtés du triangle* ABC *et ayant pour foyer commun le point* F; *les sommets de ces courbes sont les projections de* F *sur* NP, PM, MN.

Le cercle MNP rencontre les côtés de ABC en trois nouveaux points M', N', P' qui sont les projections d'un point F' symétrique de F par rapport au centre D de MNP. Les deux points F, F' sont deux *points inverses;* ce sont donc les foyers d'une ellipse U inscrite à ABC; le cercle MNP est la podaire de F et F' par rapport à U, le diamètre EF'E' du cercle est un axe de U, le second axe est dirigé suivant la droite D*d* qui joint les centres des cercles MNP, $\alpha\beta\gamma$.

Soient α', β', γ' les intersections de BC, AC, AB avec le cercle $\alpha\beta\gamma$. Le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ reste toujours semblable à lui-même lorsque le triangle $\alpha\beta\gamma$ est constant de forme. Donc :

Si les triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ *tournent respectivement autour de* F, F' *avec des vitesses angulaires égales, mais en sens contraire, leurs sommets sont toujours sur une même circonférence.*

Le cercle $\alpha\beta\gamma$ $\alpha'\beta'\gamma'$ a pour diamètre les droites II', KK' qui passent par les foyers FF' de l'ellipse U et sont limitées aux tangentes menées par les sommets E, E' de U. Donc

La conique U *est l'enveloppe du cercle* $\alpha\beta\gamma$ $\alpha'\beta'\gamma'$.

Enfin nous dirons en terminant que M. Artzt vient de publier (mars 1886) un mémoire important concernant les triangles semblables circonscrits à ABC, dans lequel il considère *douze* groupes de triangles circonscrits semblables à un même triangle.

(*) Voir : *Nouvelles Annales de Math.* t. XVIII, p. 48. *Nouvelle Corresp. Math.* t. VI, pp. 65, 72, 219, 321. *Mathesis*, t. I, p. 106.

GÉNÉRALITES SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

LES POINTS RÉCIPROQUES ET LES POTENTIELS D'ORDRE p

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 127.)

DÉVELOPPEMENTS SUR LES POINTS ASSOCIÉS A L'INFINI

14. Le point M_∞ qui est associé à l'infini avec un point donné M donne lieu à une remarque importante que nous allons développer.

Ordinairement, lorsque deux points M, M' sont associés l'un à l'autre, leurs coordonnées vérifiant les relations

$$\frac{\alpha}{f_1(\alpha',\beta',\gamma')} = \frac{\beta}{f_2(\alpha',\beta',\gamma')} = \frac{\gamma}{f_3(\alpha',\beta',\gamma')}$$

on peut déterminer α, β, γ connaissant α', β', γ'; et, réciproquement, la connaissance du point M' entraîne celle d'un ou de plusieurs points M. Mais cette règle générale est soumise à certaines exceptions qui tiennent à ce que des équations données peuvent être, dans certains cas particuliers, incompatibles ou indéterminées.

C'est ce qui se produit pour le point M_∞ et nous allons, à ce propos, préciser le rôle que ces points, que nous introduisons ici pour compléter les opérations élémentaires (*) que l'on peut effectuer avec les coordonnées d'un point, sont appelés à jouer dans la géométrie du triangle. Nous allons montrer que la connaissance du point M_∞ n'entraîne pas celle du point M, mais qu'elle détermine seulement une droite à laquelle appartient ce point. Si l'on peut trouver un second lieu géométrique de M, celui-ci se trouvera donc déterminé.

Soient $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ les coordonnées d'un point M; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ celles de son associé à l'infini. Nous avons donc, d'après la

(*) On pourra consulter pour mieux comprendre le terme *opérations élémentaires* que nous employons ici, le tableau qui termine ce travail.

définition de ces points

$$\frac{\alpha_1}{\beta_0 - \gamma_0} = \frac{\beta_1}{\gamma_0 - \alpha_0} = \frac{\gamma_1}{\alpha_0 - \beta_0}. \qquad (1)$$

Ces relations déterminent nettement α_1, β_1, γ_1 quand on donne α_0, β_0 et γ_0; mais la réciproque n'est pas exacte et elle constitue l'observation délicate que nous avons visée tout à l'heure et qui nécessite les explications présentes.

Si nous supposons connues α_1, β_1, γ_1 et si nous cherchons, au moyen des égalités (1), à calculer α_0, β_0, γ_0, nous devons d'abord observer que le système est incompatible si nous n'avons pas

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0. \qquad (2)$$

Mais supposons que cette condition soit vérifiée; supposons, en d'autres termes, que le point α_1, β_1, γ_1, considéré, soit à l'infini, dans une direction correspondant aux nombres α_1. β_1, γ_1; nous allons montrer qu'il y a une infinité de points, situés sur une droite déterminée, admettant ce point comme associé à l'infini.

En effet, les *deux* égalités (1), si l'on tient compte de (2), se réduisent à la *seule* relation

$$\alpha_1(\gamma_0 - \alpha_0) - \beta_1(\beta_0 - \gamma_0) = 0,$$

que l'on peut encore écrire, vu l'équation (2),

$$\alpha_1\alpha_0 + \beta_1\beta_0 + \gamma_1\gamma_0 = 0.$$

Les inconnues α_0, β_0, γ_0 vérifiant une seule équation, le point correspondant M n'est pas déterminé; mais, si l'on considère α_0, β_0, γ_0 comme coordonnées courantes, on voit que ce point mobile M appartient à une droite μ correspondant à l'équation

$$\alpha_1\alpha + \beta_1\beta + \gamma_1\gamma = 0,$$

et nous pouvons rechercher la position de cette droite dans le plan du triangle de référence.

A cet effet, considérons la transversale réciproque μ_0,

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\beta_1} + \frac{\gamma}{\gamma_1} = 0;$$

cette droite est donc harmoniquement associée au point donné M_∞. Concluons donc : *étant donné un point à l'infini* M_∞, *si l'on prend la droite* μ, *harmoniquement associée à ce point, puis la transversale réciproque* μ_0; *tout point, pris sur* μ, *admet le point* M_∞ *pour associé à l'infini.*

On observera que les droites telles que μ passent toujours par le centre de gravité du triangle de référence, et il résulte de cette remarque une construction rapide pour la transversale μ.

Supposons que M_∞ soit à l'infini dans la direction AD; prenons D' conjugué harmonique de D, puis D'' isotomique de D'; en joignant D'' au centre de gravité E nous avons la droite μ demandée (*).

En résumé, la connaissance du point M_∞ ne donne pas celle de M; on peut seulement déduire de cette connaissance celle d'une droite sur laquelle est situé M et la détermination complète de celui-ci exige que l'on sache encore trouver un autre lieu auquel il appartienne.

Dans la pratique, on peut opérer de deux façons.

L'égalité
$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0$$
permet de poser
$$\alpha_1 = b_1 - c_1, \qquad \beta_1 = c_1 - a_1, \qquad \gamma_1 = a_1 - b_1,$$
a_1, b_1, c_1 étant ainsi déterminées, mais d'une infinité de façons différentes. En considérant a_1, b_1, c_1 comme les coordonnées d'un point M_1, on voit que M_1 appartient à la droite μ qui vient de nous occuper; cette droite n'est donc autre chose que M_1E, E désignant le centre de gravité du triangle.

On peut aussi déterminer μ de la façon suivante. En fait, on connaît tout aussi bien les coordonnées de M et celles de M_∞, mais la question qui se pose est celle qui a pour but la détermination du point M connaissant ses coordonnées, par le secours de lieux géométriques remarquables; la détermination de ceux-ci donne alors certaines propriétés de la géométrie du triangle. D'après cela, on pourra chercher l'équation de la droite ME; puis, cette équation étant formée, on examinera si elle ne comporte pas quelque solution simple. L'étude du point M_∞ n'a précisément d'autre but que de mettre cette solution en évidence.

Mais un exemple fera mieux comprendre le but précis et l'utilité des considérations précédentes.

(*) Cette construction est l'inverse de celle que nous avons indiquée plus haut (§ 14) pour déduire d'un point donné le point associé à l'∞. Le lecteur est prié de se reporter à la figure de la p. 132.

15. Application. — On rencontre fréquemment dans la géométrie du triangle les binômes :

$$a^2 - bc, \quad b^2 - ac, \quad c^2 - ab;$$

proposons nous de fixer la position du point M (α, β, γ),

$$\frac{\alpha}{a^2 - bc} = \frac{\beta}{b^2 - ac} = \frac{\gamma}{c^2 - ab}.$$

L'associé à l'infini a pour coordonnées

$$b^2 - c^2 + a(b - c), \; \ldots.$$

ou

$$(b - c)(a + b + c), \; \ldots.$$

ou, plus simplement,

$$b - c, \quad c - a, \quad a - b.$$

Or ce point est aussi l'associé à l'infini du point dont les coordonnées sont

$$a, \quad b, \quad c,$$

c'est-à-dire du centre I du cercle inscrit. Concluons donc que *le point* M *appartient à la droite qui joint le centre de gravité* E *au centre* I *du cercle inscrit.*

Le point M n'est pas déterminé par cette remarque; nous en avons tout à l'heure donné la raison. Pour rendre tout à fait explicite la position de M, il faut trouver une seconde droite sur laquelle se trouve ce point et, pour cela, appliquer l'idée que nous avons donnée à la fin du paragraphe précédent. Cette idée, généralisée, consiste à joindre M à un point remarquable du triangle et à chercher ensuite une solution simple de l'équation ainsi obtenue.

Les points les plus simples, dans le plan du triangle de reférence, quand on considère leurs coordonnées, sont, après le centre de gravité que nous venons d'utiliser et qui, par conséquent, ne peut plus nous servir, le centre du cercle inscrit et le point de Lemoine.

Dans le cas présent, mais le fait est tout exceptionnel, nous ne pouvons pas prendre le centre du cercle inscrit; nous aurons donc recours au point de Lemoine; soit K ce point.

L'équation de KM est

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 - bc & b^2 - ac & c^2 - ab \end{vmatrix} = 0,$$

ou
$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin
$$\sum a\,\alpha\,(b^3 - c^3) = 0.$$

Parmi les solutions remarquables de cette équation on aperçoit celle-ci :
$$a\alpha = b\beta = c\gamma.$$

Le point correspondant est le réciproque du centre du cercle inscrit; ainsi : *le point* M *appartient aussi à la droite qui joint le point de Lemoine au réciproque du centre du cercle inscrit.*

Le point M se trouve donc bien déterminé et c'est ainsi que l'on peut, dans un grand nombre de cas, ou fixer la situation d'un point donné dans le plan du triangle; ou, quand cette position est connue, trouver des droites remarquables auxquelles appartient le point considéré. Nous reviendrons d'ailleurs, à propos des points isobariques, sur la construction du point associé à l'infini. (*A suivre.*)

SUR LE POINT DE NAGEL

Par M. **E. Vigarié.**

Étant donné un triangle ABC, si on joint ses sommets aux points de contact du cercle inscrit avec les côtés opposés, on a trois droites qui concourent en un point ω appelé ***point de Gergonne.*** Si l'on joint les sommets aux points de contact des cercles ex-inscrits avec les côtés, on a encore trois droites qui concourent en un second point I'_1. Les deux points ω, I'_1 sont réciproques (dans le sens défini par M. de Longchamps) (*).

Ce point I'_1 que l'on rencontre dans les questions 94 (G. de Longchamps, 1885, p. 92), 178, 186, 195 (G. Boubals), proposées aux lecteurs de ce journal, a été employé par beaucoup de géomètres, notamment par M. Brocard (*J. de spéciales,*

(*) Il est sous-entendu que le sommet A du triangle ABC considéré, doit être joint au point de contact du cercle ex-inscrit qui touche le *segment* BC.

1884, p. 207), par M. Lemoine (*J. de spéciales*, 1883, pp. 3-6, 24-33, 49-51 ; *Divers exercices de Mathématiques Élémentaires* 1884-1885).

Ce point paraissait avoir été étudié pour la première fois par M. Ad. Hochheim, dans un mémoire intitulé « *Ueber den fünften merkwürdigen Punkt (Archives de Grunert-Hoppe,* t. LII, pp. 26-40, 1871), et quelques géomètres lui avaient donné le nom de *point de Hochheim.* Le mémoire de M. Hochheim contient les coordonnées cartésiennes du point I_1', ses distances aux principaux points remarquables (centre de gravité G, centre du cercle inscrit I, centre du cercle circonscrit O, orthocentre H), d'où il tire la relation

$$2GI = GI_1'; \qquad (1)$$

enfin il étudie divers lieux géométriques (au nombre de sept) obtenus en faisant varier un élément du triangle.

C'est, croyons-nous, à M. Nagel, recteur de l'École industrielle (Real-Schule) à Ulm, que revient l'honneur de la découverte du point I_1'. Cette intéressante indication bibliographique, qui nous a été communiquée d'abord par M. H. Brocard et quelques jours après par M. J. Neuberg, est facile à contrôler. On trouve, en effet, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de 1860, cinq théorèmes énoncés par M. Nagel (voir pp. 354-355) : de ces cinq théorèmes, trois se rapportent au point I_1'. Plus particulièrement le théorème I, en tenan tcompte d'une note rectificative de Terquem (*loco. cit.* p. 440), donne la construction du point I_1' telle que nous l'avons indiquée ci-dessus et la relation (1). Le théorème V donne la construction des *points associés* de I_1' (dans le sens défini par M. Lemoine : *J. Spéciales,* 1885).

D'après des renseignements que nous devons encore à l'obligeance de M. Brocard, ces théorèmes ont été énoncés par M. Nagel en 1836, dans un travail intitulé : « *Untersuchungen über die Kreise am Dreieck* » (Leipzig).

Le droit de priorité appartenant, jusqu'ici, à M. Nagel, et M. Brocard ayant vérifié que dans les volumes des *Nouvelles Annales de Mathématiques* antérieurs à 1860 il n'est pas fait mention de ce point remarquable, nous croyons, et c'est l'opinion de M. Brocard, que l'on doit changer le terme de

point de Hochheim pour celui de POINT DE NAGEL. Nous devons ajouter, enfin, qu'une réclamation analogue a été faite, en faveur de M. Nagel, par M. Reuschle (1853 et 1854).

VARIÉTÉS

M. Ed. LUCAS nous adresse le tableau suivant pour la décomposition en facteurs premiers des nombres de la forme $10^n \pm 1$. La plupart de ces résultats ont été donnés par W. Looff, conseiller à Gotha, et publiés par REUSCHLE dans les *Neue zahlentheoretische Tabellen* (1856). Depuis, M. Lelasseur a donné la décomposition, assurément difficile, de $10^{17} - 1$ pour laquelle Looff avait affirmé qu'il n'y a pas de diviseurs inférieurs à 400000. Il y aurait lieu de combler les lacunes indiquées dans ce tableau par des traits noirs.

n	$10^n - 1$	n	$10^n + 1$
3.	3^3.37.	2.	101.
5.	3^2.41.271.	3.	7.11.13.
7.	3^2.239.4649.	4.	73.137.
9.	3^4.37.333667.	5.	11.9091.
11.	3^2.21649.513239.	6.	101.9901.
13.	3^2.53.79.265371653.	7.	11.909091.
15.	3^3.31.37.41.271.2906161.	8.	17.5882353.
17.	3^2.2071723.5363222357.	9.	7.11.13.19.52579.
19.	3^2 ? ———	10.	101.3541.27961.
21.	3^3.37.43.239.1933.4649.10838689.	11.	11^2.23.4093.8779.
23.	3^2 ? ———	12.	73.137.99990001.
25.	3^2.41.271.21401 ? ———	13.	11.859.1058313049.
27.	3^5.37.757.333667 ? ———	14.	29.101.281.121499449.
29.	3^2.3191.16763.43037 ? ———	15.	7.11.13.211.241.2161.9091.
31.	3^2.2791 ? ———	16.	353.449.641.1409.69857.
33.	3^3.67.21649.513239 ? ———	17.	11.103.4013.21993833369.
35.	3^2.41.71.239.271.4649 ? ———	18.	101.9901.999999000001.
37.	3^2 ? ———	19.	11 ? ———
39.	3^3.37.53.79.265371653 ? ———	20.	73.137 ? ———
41.	3^2.83.1231 ? ———	21.	7^2.11.13.127.2689.459691.909091.

Les barres indiquent les lacunes; mais par une méthode très simple extraite des manuscrits de Fermat on démontre assez rapidement que tous les facteurs de ce tableau sont tous des nombres premiers.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Ed. LUCAS.

... La construction relative à π (p. 137) est la même que celle qui est indiquée dans la note 3 (p. 235) du tome II des *Récréations mathématiques;* elle a éte donnée dans le *Journal de Crelle* (t. III), il y a plus d'un demi-siècle (*).

... L'erreur signalée par M. Chapron (p. 139) ne se trouve pas dans le *Canon Pellianus* de Degen (Copenhague, 1817). Ce Canon donne toutes les réduites de la racine carrée d'un nombre, jusqu'à 1000. D'ailleurs, les résultats concernant les applications à l'équation de Pell ($x^2 - Ay^2 = \pm 1$) ont été reproduits exactement dans les éditions postérieures de la *Théorie des nombres* de Legendre.

REMARQUE SUR LA QUESTION 139

Par M. **Lucien Lévy.**

Dans le numéro de juillet 1885, M. Delpiron donne une solution de la question suivante que j'avais posée autrefois : « *Mener par un point A une droite dont les distances à deux points donnés* B, C, *aient une somme donnée* 2l. *Discuter en faisant varier la position du point* A *dans le plan.* »

La solution que donne le jeune auteur est très incomplète et je voudrais indiquer aux lecteurs ce que je demandais.

(*) La formule que nous avons trouvée dans les archives de Grunert, sans indication bibliographique, et la construction que nous en avons tirée, sont dues à M. Specht. On les retrouve aussi dans l'ouvrage *Théorèmes et problèmes de Géométrie*, par M. Catalan, 1879, p. 283. Je dirai ici, à ce propos, que les auteurs pourraient rendre un réel service à leurs lecteurs en fournissant, en même temps que leurs démonstrations, les indications bibliographiques correspondantes. Il n'est même pas nécessaire que celles-ci soient complètes, parce que celles qu'on donne suffisent, en général, à mettre sur la trace des autres. G. L.

1° La droite cherchée laisse les deux points B et C d'un même côté.

Solution. — Du milieu O de la droite BC comme centre décrivez une circonférence ayant l pour rayon : il ne reste plus qu'à mener à cette circonférence une tangente par le point A.

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut qu'on puisse mener du point A une tangente à la circonférence, et que cette tangente laisse les deux points B et C d'un même côté.

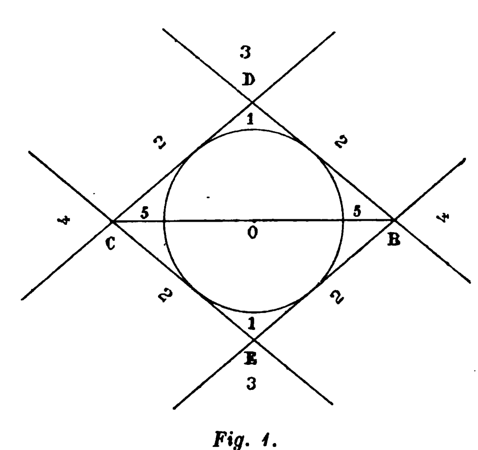


Fig. 1.

Si donc la circonférence enferme les deux points B et C, il suffira que le point A lui soit extérieur. Lorsque, au contraire, les points B et C sont extérieurs à la circonférence, le problème n'aura aucune solution si le point A est intérieur à la circonférence ou dans une des régions marquées 3 et 5 sur la *fig. 1*. Il aura une solution si le point A est dans une des régions 2. Il en aura deux si le point A est dans une des régions 1 ou 4. Le lecteur verra aisément ce qui arrive si le point A est sur une des lignes qui séparent deux régions voisines.

2° La droite cherchée passe entre les deux points.

Solution. — Du point B comme centre avec $2l$ comme rayon décrivons une circonférence; menons une tangente à cette circonférence par le point C; la droite cherchée sera la parallèle à cette tangente menée par le point A.

Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que le point C soit extérieur à la circonférence. Ensuite le problème

aura deux solutions, si le point A est intérieur au losange BDCE (*fig. 2*); une solution, s'il est dans une des régions marquées 1; zéro solution, s'il est dans une région marquée 0. Le lecteur verra aisément ce qui arrive si le point A est sur une des droites qui séparent deux régions.

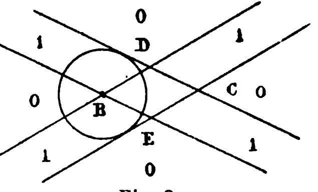


Fig. 2.

Remarque. — Il est facile de voir que les solutions qui disparaissent conviennent aux problèmes où l'on donnerait la différence $2l$ au lieu de la somme $2l$ des distances des points B et C à la droite cherchée.

QUESTION 165 (*)

Solution par M. Edmond Bordage, professeur à Nantua.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

ABCP, DEFQ, *sont deux circonférence concentriques*; ABC, DEF, *deux triangles quelconques inscrits dans ces deux circonférences*; P *et* Q, *des points pris sur chacune de ces circonférences. Démontrer que l'on a*

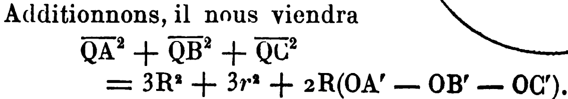
$$\overline{QA}^2 + \overline{QB}^2 + \overline{QC}^2 = \overline{PD}^2 + \overline{PE}^2 + \overline{PF}^2.$$

Soient R et r les rayons des circonférences données et concentriques O.

Abaissons de A, B, C les perpendiculaires AA', BB', CC' sur OQ. Nous aurons

$$\overline{QA}^2 = R^2 + r^2 + 2R.OA'$$
$$\overline{QB}^2 = R^2 + r^2 - 2R.OB$$
$$\overline{QC}^2 = R^2 + r^2 - 2R.OC'.$$

Additionnons, il nous viendra



$$\overline{QA}^2 + \overline{QB}^2 + \overline{QC}^2$$
$$= 3R^2 + 3r^2 + 2R(OA' - OB' - OC').$$

(*) Voyez une autre solution de cette question (J. 1885; p. 284).

Mais ABC étant équilatéral, la somme algébrique

$$OA' - OB' - OC' = 0\,;$$

donc

$$\overline{QA}^2 + \overline{QB}^2 + \overline{QC}^2 = 3R^2 + 3r^2.$$

Nous aurions de même

$$\overline{PD}^2 + \overline{PE}^2 + \overline{PF}^2 = 3R^2 + 3r^2.$$

La relation se trouve donc ainsi démontrée.

Remarque. — Nous pourrions remplacer les triangles équilatéraux par deux polygones réguliers d'un même nombre n de côtés. Les sommes considérées plus haut seraient alors égales à $n(R^2 + r^2)$.

QUESTION 169

Solution par M. Henri Martin, élève au Lycée Condorcet.

Résoudre et discuter l'équation :

$$\sin\left(45^\circ + 3\,\frac{x}{2}\right) = h\,\sin\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right).$$

(G. L.)

On a, en développant,

$$\sin 45^\circ \cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{3x}{2}\cos 45^\circ = h\left(\sin 45^\circ \cos\frac{x}{2} - \cos 45^\circ \sin\frac{x}{2}\right).$$

En remarquant que

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$$

et en développant $\cos\frac{3x}{2}$ et $\sin\frac{3x}{2}$, il vient

$$\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\left(4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 1 - h\right) = 0.$$

On a donc les équations

$$\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0, \quad (1) \qquad\qquad \sin x = \frac{h-1}{2}. \quad (2)$$

Les valeurs de x qui satisfont à (1) sont données par les formules

$$x = K\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Pour que (2) donne des valeurs acceptables, il faut que

$$(h - 1)^2 < 4,$$

ou

$$(h - 3)(h + 1) < 0.$$

NOTA. — Solutions analogues par MM. Fitz-Patrick, élève de mathématiques élémentaires au lycée de Poitiers; René de Vaulchier, élève à l'institution Sainte-Marie, à Besançon; Benezech, au collège de Cette; J. Chapron, à Bragelogne; Anatole Chapellier, élève au lycée de Nancy; Ed. Bordage, professeur au collège de Nantua; Bécla, au collège de Beauvais; Gaston Lamy, élève à l'institution Sainte-Marie.

CONCOURS GÉNÉRAL (1886)

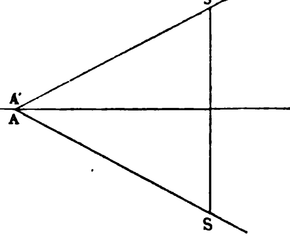
Mathématiques élémentaires.

On donne à l'intérieur d'un cercle de rayon R un point P dont la distance au centre O est égale à a. On mène par P deux cordes rectangulaires AC et BD et l'on considère les tangentes au cercle aux extrémités de ces cordes. Déterminer l'angle APO, de façon que l'aire du quadrilatère convexe EFGH formé par ces tangentes soit égale à une aire donnée K^2.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (1886)

Epure (2 heures 1/2).

On donne un point A sur la ligne de terre, un point S distant du plan horizontal de 78^{mm}, du plan vertical de 51^{mm}, et du point A de 124^{mm}. Construire le tétraèdre SABC dont la base ABC est sur le plan horizontal de projection, sachant que le plan BSC est perpendiculaire à l'arête SA, et que les angles dièdres AB et AC valent chacun 68°. — On aura soin de placer le point A le plus à gauche possible.

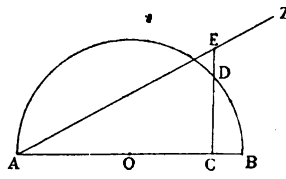


Construire l'intersection de cette pyramide avec le cylindre de révolution qui a SA pour axe et pour rayon 55^{mm}.

Dans la mise à l'encre, on supposera que le tétraèdre est seul et que le solide commun au cylindre et à la pyramide est enlevé.

Mathématiques (3 heures).

I. Les trois côtés d'un triangle forment une progression arithmétique dont on donne la raison ; on connaît le rapport m de la surface de ce triangle à celle du rectangle construit sur les deux plus petits côtés. Calculer les côtés de ce triangle — Discuter. Dans le cas particulier $m = \frac{1}{2}$, calculer le rayon du cercle inscrit dans le triangle.



II. On a un demi-cercle AOB, une droite AZ faisant avec AB un angle aigu donné α ; trouver sur AB un point C tel qu'en élevant par ce point une perpendiculaire à AB on ait $CD + CE = l$.

III. Déterminer les valeurs de x comprises entre 0° et 180° qui satisfont à l'équation $b \operatorname{tg} 3x = a + \sqrt{a^2 + b^2}$.

On fera $a = 42587,8$ $b = 36723,7$

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES (*)

FACULTÉ DE LYON

22 juillet 1885 *(Première série)*. — Les bases d'un trapèze sont respectivement 5^m et 9^m, et les diagonales ont pour valeur 13^m et 15^m. On propose de calculer l'angle des diagonales et la hauteur du trapèze.

23 juillet. — Trouver un nombre de 2 chiffres tel que divisé par le produit de ces 2 chiffres, il donne 16/3 pour quotient et que si l'on en retranche 9, on obtienne le nombre renversé.

24 juillet. — Les trois côtés de la base d'un pyramide triangulaire sont égaux à $3^m,90$, $4^m,20$, $4^m,50$. Le volume de cette pyramide est égal à $12^{mc},096$. On demande la surface d'une section faite parallèlement à la base à une distance du sommet égale à $1^m,6$.

25 juillet. — I. Un ouvrier dépose, au commencement de chaque semaine une somme a à la caisse d'épargne, pendant n années consécutives. Quel est, après ce temps, le montant M de son livret? Le taux est de r pour un franc et les intérêts se capitalisent à la fin de chaque année.

Application : On fera le calcul de M en admettant que $a = 2$ francs, $n = 10$, $r = 0$ fr. 035.

II. — On lance une pierre verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale de 20^m par seconde; 2 secondes après, du même point

(*) Nous devons la connaissance de ces énoncés et celle de plusieurs autres qui seront publiés dans le prochain numéro à l'obligeance de M. Bordage.

on lance une pierre verticalement de bas en haut avec une vitesse de 25^m. On demande à quelle distance du point de départ les 2 pierres se rencontreront, si ce sera en montant ou en descendant et après combien de secondes après l'instant auquel on a lancé la première pierre.

27 juillet. — On fait tourner le triangle rectangle BCA autour de l'axe MN qui est parallèle à l'un des côtés de l'angle droit. On demande quelle doit être la distance AM pour que le volume engendré par le triangle rectangle soit égal à $20^{mc},88$. — On donne $AB = 2^m,6$ et $AC = 2^m,54$.

29 juillet. — Deux villes A et B sont éloignées de 200 kilom. Un chemin de fer rectiligne AX, partant de A, passe à 87^{km} de B. On propose de construire une route ordinaire allant de B au chemin de fer, de telle sorte que le trajet des marchandises allant de B en A ou de A en B soit le moins coûteux possible en supposant que le port soit deux fois moindre sur le chemin de fer que sur la route. A quelle distance de A devra être placée la station qui reliera B à ce chemin de fer AX?

30 juillet. — Inscrire dans une sphère donnée un cône circulaire droit, de manière que la surface latérale de ce cône soit équivalente à celle de la calotte sphérique de même base que le cône. — Calculer l'angle au sommet de ce cône.

26 octobre. — Une personne verse, dans une banque, une somme S, au commencement de chaque année, pendant n années consécutives. On demande quelle somme A elle doit recevoir au commencement de chaque année pendant les 24 années suivantes pour être entièrement remboursée de ses avances. — Le taux est r pour un franc. — Quel doit être n pour que A soit précisément égal à S?

4 novembre. — I. Un triangle ABC est inscrit dans une sphère dont le rayon est de $4^m,75$. Les 3 côtés du triangle sont $a = 2,^m50$, $b = 3,^m25$ $c = 1^m,35$. — On demande de calculer à $\frac{1}{100}$ près la perpendiculaire abaissée du pôle de ce triangle sur son plan.

II. Résoudre l'équation $3 \cos x + 4 \sin x = 5$.

6 novembre. — Le rayon de la base d'un cône droit est de 3^m, et celui de la sphère inscrite dans ce cône $= 2^m$. On propose, d'après ces données, de calculer la surface et le volume de ce cône, ainsi que l'angle que font les génératrices avec l'axe.

9 novembre. — Sur une droite XX′, on marque n points distants de la même longueur a, A, B, ... N et on les numérote 1, 2, ... n. Trouver la distance au premier point A d'un point y de la droite tel que la somme des carrés de ses distances Ay, By, ... Ny aux autres points donnés, multipliés par les numéros o, 2, ... n correspondants : $1 \times \overline{Ay}^2 + 2 \times \overline{By}^2 + \ldots\ldots + n \times \overline{Ny}^2$ soit un maximum.

11 novembre. — La surface d'un triangle est de 15^{mq} et les longueurs de deux des côtés sont de 0^m et de 5^m. On propose de déterminer la longueur du troisième côté et les angles de ce triangle.

QUESTIONS PROPOSÉES

215. — On considère un triangle équilatéral ABC et le cercle Δ, inscrit à ce triangle. Du point O, centre de Δ, avec une longueur égale au quart du rayon de Δ, comme rayon, on décrit un cercle Δ'. Parallèlement aux côtés BC, CA, AB on mène à Δ', *dans le même sens*, des semi-tangentes qui rencontrent Δ respectivement aux points α, β, γ. Le triangle αβγ, ainsi formé, est équilatéral, pour des raisons évidentes; démontrer : 1° que les côtés de ce triangle βγ, γα, αβ passent respectivement par les sommets A, B, C du triangle proposé; 2° qu'ils sont égaux à la moitié de ceux de ce triangle.

(G. L.)

N.-B. — En prenant les semi-tangentes opposées à celles qui sont considérées dans l'énoncé précédent, on détermine un second triangle équilatéral α'β'γ' qui jouit, bien entendu, des mêmes propriétés que celles que nous proposons de reconnaître au triangle αβγ.

216. — Un triangle ABC étant inscrit à un cercle, soient EDF le diamètre perpendiculaire au côté AB, et G la projection de C sur EF : la demi-somme des côtés AC, BC est moyenne proportionnelle entre les segments DF, GE; leur demi-différence est moyenne proportionnelle entre les segments DE, FG. *(Catalan.)*

Nota. — Dans l'énoncé de la question 2c3, question dont nous avons déjà reçu plusieurs bonnes solutions, nous avons omis de dire que A désignait le point de contact de Δ et de Δ'.

G.L.

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 13834-6.

L'OMNIFORMULE DE CUBATURE

Par M. **Casimir Rey**

(*Fin*, voir p. 148.)

31. Note IV. — En 1848 (*Nouvelles Annales*, t. VII), Finck publia un mémoire que nous avons utilisé dans une partie de notre travail et la formule de cubature dont nous nous occupons ici, fut nommée formule de Finck par les élèves de l'éminent professeur de Strasbourg.

Cependant il terminait ainsi son mémoire :

« Tout cela est renfermé dans un théorème de Sarrus dont voici l'énoncé :

» *Si dans un corps, toute section parallèle à un plan donné a son aire exprimée par* $A + Bz + Cz^2$ *où* z *est la distance de la section au plan ;* A, B, C *sont des constantes ; un segment quelconque, renfermé entre deux plans parallèles au même plan, se mesure par*

$$\frac{h}{6}(b + 4b' + b'')$$

» Un peu d'intégral suffit pour la démonstration (*b*, *b'* sont les sections extrêmes, *b''* est la section équidistante des premières). »

Cette déclaration a conduit sans doute M. Dupuis. l'auteur des Recherches sur le Nombre de Platon, à nommer du nom de Sarrus, la formule dont il donne seulement l'énoncé dans la dernière édition de ses *Tables de logarithmes*.

Mais voici ce que nous écrit le capitaine Brocard qui a bien voulu nous aider de ses excellents conseils pendant la rédaction de notre travail et dont tous les lecteurs des journaux de mathématiques connaissent les belles découvertes géométriques, la grande érudition :

« Il serait extrêmement intéressant de trouver trace de ce théorème dans un écrit de Sarrus, pour mon compte je n'en ai pas remarqué... Consulter sur le même sujet (*Journal de Crelle*, t. XLV, 1853) une note d'August de Berlin relative à une formule de cubature qu'il avait fait connaître dès 1849

dans un programme scolaire (volumes de révolution du second degré). L'auteur remarque l'application de sa formule aux obélisques, comme Finck l'avait observé dans sa Géométrie (3me édition, p. 458). Il cite comme ayant employé ou signalé cette formule Chapman, Prony, Eytevelein, Poncelet, Brix, Steiner.

» Steiner en a même donné une démonstration géométrique (*Journal de Crelle,* t. XXIII, p. 275). »

Le *Bulletin de la Société de statistique de l'Isère* (1882) contient sur la question un intéressant travail de notre collègue M. Latars.

Le théorème fondamental du § 5, accompagné de quelques applications, est actuellement enseigné par beaucoup de professeurs ; il se trouve dans le *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse § 656, dans celui de M. Vacquant § 659, dans l'*Appendice aux Exercices de Géométrie,* par F.I.C et probablement dans beaucoup d'autres ouvrages.

M. Bertrand (*Traité de Calcul intégral,* chap. II, p. 409), donne la formule pour les volumes engendrés par une surface plane $s = A_0z^2 + A_1z + A_2$ se mouvant parallèlement à elle-même dans le sens des z et M. de Longchamps nous signale la thèse de M. Pujet (*Des Quadratures,* juillet 1868) dans lequel le vœu émis § 1 est déjà exprimé.

Dans une note ajoutée au mémoire de Finck, Terquem revendiquait le Théorème en faveur de Koppe qui en 1838 avait publié (*Journal de Crelle,* t. XVIII) le théorème suivant:

« *Un corps, ayant pour bases deux polygones parallèles et pour face des trapèzes, est équivalent à un prisme ayant pour base l'aire de la section parallèle faite à égale distance des deux bases, et augmenté du douzième de l'aire du polygone qui a les mêmes angles que les polygones et qui a pour côtés les différences des côtés homologues.* »

Enfin quelques-uns attribuent le théorème à Maclaurin, d'après un article de M. Maleix publié dans les *Nouvelles Annales* (t. XIX, 1880, sur l'évaluation de certains volumes) où l'auteur dit :

« On retrouve pour expression V, dans ces hypothèses,

$$V = \frac{h}{6}(B_1 + 4B_2 + B_3),$$

formule due à Maclaurin (Fluxions n° 848; 1742). » Or dans son *Traité des fluxions* Maclaurin ne s'occupe pas de cubatures et la formule du n° 848 n'a que la forme de l'omniformule, comme on va le voir.

Le n° 848 du *Traité des fluxions* fait partie du chapitre IV (livre II) intitulé :

« De l'aire des figures quand leur ordonnée est exprimée par une fluente. » (Une fluente est une fonction dont on considère les dérivées ou fluentes successives.)

Dans le n° 848, Maclaurin considère l'aire AF*fa* comprise entre les ordonnées FA, *fa*.

Il appelle A la somme des ordonnées FA et *fa*; B l'ordonnée BE équidistante de FA et *fa*; R la ligne A*a* et il démontre que :

« L'aire $AFfa = \frac{A + 4B}{6}R - \frac{R^4\delta}{9 \times 720} + \frac{R^6\zeta}{81 \times 3240}$, etc. »

δ, ζ etc. sont ce que nous appelons actuellement les différences 3me, 5me, etc. de y par rapport à l'abscisse, pour $y_1 = fa$, $y_0 = FA$. Les abscisses sont comptées à partir du point O.

Maclaurin observe que si l'on néglige δ, ζ etc. l'aire devient

$$\frac{A + 4B}{6}R.$$

mais il n'indique pas, ou plutôt il ne rappelle pas, quand ces différences sont négligeables et il ne traite pas l'application aux cubatures.

Si un nom d'auteur devait être donné à la formule, celui de Simpson pourrait être mis en avant, avec des titres à la revendication, plus justifiés que ceux des savants déjà cités.

Il est de fait impossible d'attacher un nom d'auteur à toutes les formules. Beaucoup d'entre elles ont un grand nombre d'ascendants et la recherche de la paternité ne conduit alors, le plus souvent, qu'à des discussions stériles. Dans ce cas, le mieux n'est-il pas de choisir un nom de qualité au lieu d'un nom propre?

C'est ce qui nous conduit ici à proposer le nom d'*omniformule de cubature;* il se justifie de lui-même et nous serons heureux de le voir adopter.

PROBLÈME DE MÉCANIQUE

Par M. **Ed. Guillet,** professeur au Lycée d'Avignon.

(*Fin*, voir p. 121).

Valeur absolue de la vitesse de la sphère en un point quelconque de sa trajectoire. — Prenons pour origine le point de départ de la branche parabolique sur laquelle se trouve le point considéré et pour axes de coordonnées, une horizontale et une verticale passant à l'origine.

Désignons par V_0 la vitesse de départ sur cette branche parabolique; par H la distance de l'origine à la directrice commune; par V_x et V_y les projections horizontale et verticale de la vitesse V à l'époque t; par β l'angle de la vitesse de départ avec la normale au plan incliné; enfin par x et y les coordonnées du point considéré.

Nous avons

$$\left\{\begin{array}{l} V_0^2 = 2gH \\ V_x = V_0 \sin(\alpha + \beta) \\ V_y = V_0 \cos(\alpha + \beta) - gt \\ x = V_0 t \sin(\alpha + \beta) \\ y = V_0 t \cos(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} gt^2 \end{array}\right.$$

Puisque $V^2 = V_x^2 + V_y^2$, on aura

$$V^2 = V_0^2 - 2gtV_0 \cos(\alpha + \beta) + g^2t^2$$

Or, si on laissait simplement tomber la sphère du point de la directrice commune situé verticalement au-dessus du point considéré, la vitesse V_1 acquise dans cette chute libre de hauteur $H - y$, serait donnée par la formule

$$V_1^2 = 2g(H - y),$$

En remplaçant H par $\frac{V_0^2}{2g}$ et y par $V_0 t \cos(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} gt^2$, on aura :

$$V_1^2 = {}_0^2 - 2gtV_0 \cos(\alpha + \beta) + g^2t^2,$$

On voit ainsi que, quel que soit t, on a toujours

$$V = V_1,$$

c'est-à-dire, *qu'en un point quelconque de sa trajectoire, la vitesse absolue de la sphère est la même que si cette sphère tombait directement en ce point à partir du point de la directrice commune qui lui est verticalement superposé.*

On a vu, qu'en particulier, les vitesses B′, B″... peuvent être obtenues par les chutes libres K′B′, K″B″...

Cas particuliers. — Les solutions et considérations qui précèdent s'appliquent à une valeur quelconque de l'angle α du plan incliné avec le plan horizontal.

1° Dans le cas particulier où $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand le plan donné est horizontal, les résultats généraux deviennent

$$A = A' = A'' = \ldots = 0$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha'' = \ldots = 0$$
$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = \ldots = 0$$

Mouvement sur le plan horizontal. — Après un certain nombre de bonds, dépendant de la longueur du plan incliné, la sphère viendra rencontrer le plan horizontal en un certain point B.

Supposons, comme le représente notre figure, que la troisième branche parabolique ait une de ses extrémités B″ au-dessus du plan horizontal et l'autre extrémité B‴ au-dessous du même plan; cette branche se termine sur le plan horizontal OXX′ en un point B_1 que nous nous proposons de déterminer.

Pour cela nous rappellerons qu'en un point quelconque d'une parabole, la sous-normale est constamment égale à la distance F″D″ du foyer à la directrice et la sous-tangente est double de la distance du sommet au pied de la perpendiculaire abaissée du point considéré sur l'axe.

Nous prendrons donc $GR = F''D''$ et $S''V = S''G$ pour décrire ensuite sur VR comme diamètre une demi-circonférence qui coupe la trace OXX′ du plan horizontal précisément au point B_1 cherché.

La tangente à la branche $B''S''B_1$ en B_1 est la droite B_1V et, en prenant l'angle $K_1B_1C_1$ égal à l'angle K_1B_1V on aura suivant B_1C_1 la direction de la vitesse initiale du premier bond tout entier sur le plan horizontal.

Nous savons d'ailleurs que la vitesse suivant B_1C_1 est égale

à celle que produirait la chute directe de la sphère suivant K_1B_1 ; nous déterminerons donc les éléments de cette quatrième branche comme nous l'avons fait pour les précédentes. Le deuxième point d'intersection X' avec le plan horizontal sera symétrique de B_1 par rapport à l'axe $D_1F_1E_1$ de cette branche; de plus la vitesse en X' sera égale à la vitesse en B_1 et également inclinée sur le plan horizontal.

On aura ainsi sur le plan horizontal une série indéfinie de bonds identiques ayant leurs sommets et leurs foyers sur deux droites parallèles à la directrice commune AD_1.
c'est-à-dire que les amplitudes et les angles de réflexion sont toujours nuls. On a donc un mouvement vertical alternatif indéfini, dans lequel la durée constante de chaque oscilation complète est $\frac{2v_0}{g}$ ou $2\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

C'est un résultat connu.

2° Dans le cas particulier où $\alpha = 45°$, la droite des foyers sera verticale et, par suite, aussi celle des sommets. Nous aurons une série de branches paraboliques ayant toutes leurs sommets et leurs foyers sur la verticale du point de départ A et pour directrice commune l'horizontale ADD'... Ces paraboles seront faciles à construire car les amplitudes sont

$$A = 8h,$$
$$A' = 16h,$$
$$A'' = 24h, \dots \text{ etc.}$$

et la connaissance d'un point B' entraîne celle des foyers F et F' et des sommets S et S' puisque la directrice ADD' est déterminée.

PRODUIT DES TERMES D'UNE PROGRESSION ARITHMÉTIQUE

Par M. **Charles Guieysse**, élève à l'École Monge.

Soit une progression arithmétique

$$a + r, \quad a + 2r, \dots a + mr,$$

et soit le produit

$$P = (a + r)(a + 2r) \dots (a + mr),$$

on a :

$$P = A_0 a^m + A_1 a^{m-1} r + A_2 a^{m-2} r^2 + \dots + A_m r^m.$$

Pour former le terme $A_0 a^m$ nous avons pris a dans les m binômes ; donc

$$A_0 = 1.$$

Pour former l'ensemble $A_1 a^{m-1} r$, nous avons pris tous les termes comprenant $m - 1$ fois a et 1 fois r ; donc A_1 constitue la somme des produits 1 à 1 des m premiers nombres, somme que nous désignerons par le symbole S_1.

$$A_1 = S_1.$$

De même, nous avons :

$$A_2 = S_2,$$
$$A_3 = S_3,$$
$$\dots \quad \dots$$
$$A_m = S_m.$$

D'où (en posant pour généraliser $S_0 = 1$)

$$P = S_0 a^m + S_1 a^{m-1} r + S_2 a^{m-2} r^2 + \dots + S_m r^m.$$

Si nous faisons $a = r = 1$ nous avons le développement d'un factoriel en une somme de termes :

$$(m + 1)\,! = S_0 + S_1 + S_2 \dots + S_m.$$

Les termes S_0 S_1 ... S_p ... S_m ont une loi de formation bien déterminée, traduisons cette loi par une équation algébrique.

Première formule. — Calculons S_p en fonction des termes précédents S_{p-1} ... et en fonction de S', S' ... S'_p. Nous désignons ainsi la somme des puissances 1me, 2me ... p^{me} des m premiers nombres.

Nous avons $S_0 = 1,$

et $S_1 = S_1'.$

Calculons S_2 ; S_2 résulte de la sommation :

$$\Sigma\alpha\beta,$$

α et β étant deux nombres quelconques de la suite 1 ... m.

Considérons l'un des facteurs, α par exemple, comme fixe et faisons varier β ; β prendra toutes les valeurs dont la somme constitue S_1, sauf cependant α, donc :

$$\Sigma\alpha\beta = \Sigma\alpha(S_1 - \alpha).$$

Maintenant faisons varier α :

$$\Sigma\alpha\beta = 1(S_1 - 1) + 2(S_1 - 2) \dots + m(S_1 - m).$$

Effectuons les différentes multiplications et groupons :

$$\Sigma\alpha\beta = S_1S'_1 - S'_2.$$

Mais α, en variant, a pris les valeurs β, donc le même terme s'est formé deux fois, et comme S_2 n'admet que des termes différents, on a :

$$2S_2 = S_1S'_1 - S'_2,$$

ou

$$2S_2 - S_1S'_1 + S'_2 = 0.$$

Remarquons que $2 = 2! = P_2$ (nous appelons, suivant l'usage, P_n le nombre des permutations de n objets).

Calculons S_3 ; S_3 résulte de la sommation

$$\Sigma\alpha\beta\gamma.$$

Considérons α comme fixe et $\beta\gamma$ comme variable.

$\beta\gamma$ prendra toutes les valeurs dont la somme constitue $2S_2$ sauf celles contenant α c'est-à-dire $\alpha(S_1 - \alpha)$. Donc

$$\Sigma\alpha\beta\gamma = \Sigma\alpha[2S_2 - \alpha(S_1 - \alpha)]$$

ou

$$\Sigma\alpha\beta\gamma = 1[2S_2 - 1(S_1 - 1)] + 2(2S_2 - 2(S_1 - 2)] + \ldots + m[2S_2 - m(S_1 - m)].$$

Effectuant et groupant :

$$\Sigma\alpha\beta\gamma = 2S_2S'_1 - S_1S'_2 + S'_3.$$

Dans $\Sigma\alpha\beta\gamma$ il y a répétition de termes, chacun des termes se trouve répété autant de fois qu'il y a de permutations de trois lettres.

Donc on a :

$$3!\,S_3 - 2!\,S_2S'_1 + S_1S'_2 - S_3 = 0.$$

Le raisonnement sera le même pour le terme général. On aura :

$$p!\,S_pS'_0 - (p-1)!\,S_{p-1}S'_1 + (p-2)!\,S_{p-2}S'_2 + \ldots + (-1)^k(p-k)!\,S_{p-k}S'_k + \ldots + (-1)^p o!\,S_0S'_p = 0;$$

pour donner plus de symétrie à cette formule nous posons

$$S'_0 = S_0 = o! = 1.$$

Cette formule présente une sorte d'homogénéité indiquée par les indices de S et S′; il suffit de considérer la valeur des symboles pour voir que dans chaque terme il y a le produit de p termes égaux ou différents.

Deuxième formule. — Aux indices inférieurs, déjà expliqués, joignons des indices supérieurs indiquant le nombre de termes de la progression arithmétique.

S_p^m désignera la somme des produits p à p des m premiers nombres.

Si l'on considère les termes entrant dans S_p^m et dans S_p^{m-} , on a évidemment

$$S_p^m - S_p^{1-m} = mS_{p-1}^{m-1};$$

d'où, en remarquant qu'il faut supposer $m \geqslant p$,

$$S_p^m - S_p^{m-1} = m S_{p-1}^{m-1}$$
$$S_p^{m-1} - S_p^{m-2} = (m - 1)\, S_{p-1}^{m-2}$$
$$S_p^{m-2} - S_p^{m-3} = (m - 2)\, S_{p-1}^{m-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_p^{p+1} - \quad S_p^p = (p + 1)\, S_{p-1}^p$$

Additionnons et réduisons :

$$S_p^m - S_p^p = mS_{p-1}^{m-1} + (m - 1)S_{p-1}^{m-2} + (m - 2)S_{p-1}^{m-3} + \ldots + (p + 1)S_{p-1}^p.$$

Observant que $S_p^p = p! = p \times (p - 1)! = pS_{p-1}^{p-1}$

il vient finalement :

$$S_p^m = mS_{p-1}^{m-1} + (m - 1)S_{p-1}^{m-2} + (m - 2)S_{p-1}^{m-3} + \ldots + (p + 1)S_{p-1}^p + pS_{p-1}^{p-1}.$$

Dans la première formule les indices inférieurs changeaient; dans cette seconde, ce sont les indices supérieurs, après l'abaissement d'une unité de l'indice inférieur.

On peut à l'aide d'une des deux formules précédentes calculer, par voie récurrente, tous les termes du développement du produit des termes d'une progression arithmétique.

GÉNÉRALITES SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

LES POINTS RÉCIPROQUES ET LES POTENTIELS D'ORDRE p

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 154.)

14. Correspondances diverses. — Mais on rencontre encore dans la géométrie du triangle des points qui sont associés les uns aux autres par des lois géométriques plus complexes que les précédentes, bien que relativement très simples.

Imaginons deux points M, M′ dont les coordonnées vérifient les égalités

$$(M)\quad \frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{C},\qquad (M')\quad \frac{\alpha'}{A'}=\frac{\beta'}{B'}=\frac{\gamma'}{C'};$$

considérons maintenant un point M″ (α'', β'', γ'') associé aux précédents au moyen des formules

$$\frac{\alpha''}{\left(\frac{A}{A'}\right)}=\frac{\beta''}{\left(\frac{B}{B'}\right)}=\frac{\gamma''}{\left(\frac{C}{C'}\right)},$$

et proposons nous de trouver le point M″.

Nous avons :

$$\frac{B\mu}{C\mu}=\frac{C}{B},\qquad \frac{B\mu'}{C\mu'}=\frac{C'}{B'}$$

et

$$\frac{B\mu''}{C\mu''}=\frac{\left(\frac{C}{C'}\right)}{\left(\frac{B}{B'}\right)}=\frac{\left(\frac{C}{B}\right)}{\left(\frac{C'}{B'}\right)}=\frac{\left(\frac{B\mu}{C\mu}\right)}{\left(\frac{B\mu'}{C\mu'}\right)}.$$

Cette dernière fraction représente le rapport anharmonique des points (B, C, μ, μ'). Menons par C une parallèle à $A\mu'$, nous avons

$$\frac{\frac{B\mu}{C\mu}}{\frac{B\mu'}{C\mu'}}=\frac{HK}{HC},$$

et, par conséquent,

$$\frac{B\mu''}{C\mu''}=\frac{HK}{HC}.$$

Ainsi la droite μ''H est parallèle à AB. On peut donc, par cette construction assez simple et n'exigeant d'ailleurs que l'emploi de la règle et de l'équerre, tracer la droite $A\mu''$ qui passe par le point cherché M″. On déterminera complètement ce point en répétant le tracé indiqué pour l'un des deux autres côtés.

Une autre association qui, au premier abord, paraît plus difficile à réaliser géométriquement est celle qui correspond

aux formules (M) et (M') et à la suivante :

$$\frac{\alpha''}{AA'} = \frac{\beta''}{BB'} = \frac{\gamma''}{CC'}. \qquad (M'')$$

Mais si l'on considère le point M_0, réciproque du point M, on a

$$\alpha\alpha_0 = \beta\beta_0 = \gamma\gamma_0,$$

et, par suite,

$$A\alpha_0 = B\beta_0 = C\gamma_0.$$

Les formules (M'') s'écrivent alors

$$\frac{\alpha''}{\left(\frac{A'}{\alpha_0}\right)} = \frac{\beta''}{\left(\frac{B'}{\beta_0}\right)} = \frac{\gamma''}{\left(\frac{C'}{\gamma_0}\right)}$$

et l'on retombe dans le cas que nous avons résolu à l'instant.

15. Potentiels d'ordre p. — Généralisons maintenant cette idée d'association entre un point donné et un point correspondant, et convenons de dire qu'un point $M'(\alpha', \beta', \gamma')$ est le p^{me} potentiel (*) d'un point donné $M(\alpha, \beta, \gamma)$, lorsque les égalités

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}, \qquad (M)$$

et

$$\frac{\alpha'}{A^p} = \frac{\beta'}{B^p} = \frac{\gamma'}{C^p}, \qquad (M')$$

sont vérifiées.

En appliquant, de proche en proche, la construction que nous venons d'indiquer à la fin du paragraphe précédent, on obtiendra, successivement, les potentiels d'ordre 2, 3, etc.

Mais cette construction offre quelques longueurs que l'on peut éviter et nous nous proposons d'établir certaines constructions rapides pour les potentiels les plus simples, ceux de l'ordre 2, 3 ou 4.

(A suivre.)

(*) Cette expression commode est de M. Neuberg.

NOTES SUR LES QUESTIONS 5, 130 ET 140

Par Émile Vigarié.

Sur la question n° 5. — Cette question proposée en 1882 par M. J. Neuberg et résolue en 1884 par M. Madiot est ainsi énoncée :

A tout triangle ABC on peut inscrire deux triangles ayant leurs côtés perpendiculaires à ceux de ABC. Ces triangles sont inscriptibles dans une circonférence ayant pour centre le point de Lemoine de ABC.

Cette même proposition avait été énoncée par M. Neuberg, dans son « *étude sur le centre des médianes antiparallèles* » (*Mathésis* t. I, 1881, p. 185-186). Elle peut encore se déduire des propositions suivantes : (E. Lemoine, *Association française*, Lille 1874. § 2).

1° Si on considère tous les rectangles inscrits à un triangle ABC et dont l'un des côtés repose sur l'un des côtés BC du triangle, le lieu du centre de ces rectangles sera la droite qui joint le milieu de BC au milieu de la hauteur correspondante.

2° Le point de Lemoine est le centre de trois rectangles, inscrits dans un triangle, et ayant deux côtés perpendiculaires à ceux du triangle donné.

3° Le point de Lemoine est tel que les antiparallèles aux côtés du triangle menées par ce point sont égales (E. Lemoine, Lyon 1873, § 8), ce qui peut s'énoncer en disant que :

Le point de Lemoine est le centre d'un cercle qui coupe les côtés du triangle en des points diamétralement opposés. (A. Morel, « *Étude sur le cercle de Brocard* ». (J. M. E.; 1883, p. 197.)

Si en effet par le point K de Lemoine on mène les antiparallèles A_bA_c, B_aB_c, C_aC_b à BC, AC, AB, on a trois rectangles $C_bB_cC_aB$, $A_cC_aA_bC_b$, $B_aA_bB_cA_c$; les deux triangles $C_aA_bB_c$, $B_aC_bA_c$ satisfont à l'énoncé de la question n° 5 ; le rapport de similitude de ces triangles à ABC est égal à $\operatorname{tg} \alpha$ (α étant l'*angle de Brocard*) ; la longueur commune des anti-

parallèles aux côtés du triangle est égale à :

$$\frac{2abc}{a^2+b^2+c^2}.$$

Enfin les six points C_b, B_c, A_c, C_a, B_a, A_b sont deux à deux diamétralement opposés sur une même circonférence ayant le point de Lemoine pour centre et pour diamètre les antiparallèles précitées. Cette circonférence est appelée *deuxième cercle de Lemoine.*

Sur la question n° 130. — Énoncée par M. Perrin (1884) nous en avons donné une solution (1885, p. 211) et le théorème que nous avons donné à la fin est dû, comme nous le pensions à M. G. Dostor (*Mathésis*, 1881, t. I, p. 156). Cette question 130, se trouve résolue dans les « *Questions de géométrie élémentaire* » de M. Desboves (p. 238, 3e édition, 1880).

Elle a encore été proposée sans nom d'auteur dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1859, question 485, p. 357) et a été résolue par M. E. Françoise en 1860 (p. 13-14).

A ces propositions se rattachent les suivantes qui ont une grande analogie (*N. A. M.*, questions 483, 484, proposées en 1859, p. 357, résolues en 1860, p. 11-12 et 13) :

D'un point B extérieur à une circonférence O on mène deux tangentes BA, BC, on projette C en D sur le rayon OA; si on fait exécuter une résolution complète autour de OA:

1° Le segment sphérique engendré par CDA est équivalent au volume engendré par le triangle CBD.

2° Le volume engendré par le triangle mixtiligne CBA est équivalent au cône engendré par le triangle BDA.

C'est en s'appuyant sur cette seconde partie que M. Charodon a donné une seconde solution de la question 130 (*N. A. M.*, 1860, p. 188-189).

Sur la question n° 140. — Cette question proposée par M. L. Lévy, et résolue dans ce journal (1885, p. 22) est ainsi énoncée :

Si d'un point O *pris sur une circonférence de diamètre* AB, *on*

décrit une circonférence tangente à AB, *les tangentes* AA′, BB′ *à cette circonférence, issues de* A *et* B, *sont parallèles.*

Si l'on observe que A′B′ est un diamètre de la circonférence O tangent en O à la circonférence AB et que AO, BO sont deux droites rectangulaires, il est évident que la question aurait pu être énoncée ainsi :

Si par le centre O *d'une circonférence donnée, on mène deux droites rectangulaires* AO, BO *et que par un point quelconque* P *de la circonférence, on mène une tangente ; elle coupera les droites* AO, BO *en des points* A, B *tels que les tangentes issues de ces points sont parallèles.*

Sous cette forme, il est facile de voir que c'est un cas particulier de la proposition plus générale suivante, dont M. Kœhler a donné deux démonstrations, l'une analytique, l'autre géométrique. (Voir *Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure*, 1886, p. 90-91, première partie):

Par un point O, *on mène deux droites conjuguées par rapport à une conique; une tangente quelconque les coupe en deux points* A, B *tels que les deux autres tangentes menées par les points* A, B *se coupent sur la polaire de* O.

BIBLIOGRAPHIE

Nous avons reçu de M. N. Philippof, de Saint-Pétersbourg, une très curieuse et très intéressante brochure ayant pour titre *Simplification du calcul algébrique*. Cette note est écrite dans la langue russe et il nous eût été impossible de découvrir même le principe de ce travail, si l'auteur, en nous l'adressant, n'avait eu l'obligeance de l'accompagner d'une lettre française, explicative et très détaillée. Cette lettre nous a permis de comprendre la pensée qu'a eue M. Philippof et qui nous paraît de nature à intéresser nos lecteurs.

Voici quelle est la base de la simplification que propose M. Philippof.

Prenons le nombre 356 dans le système décimal; en réalité, ce nombre devrait s'écrire

$$3.10^2 + 5.10 + 6;$$

et, plus généralement, dans un système de base x,

$$3x^2 + 5x + 6.$$

Partant de là, et à l'imitation de l'écriture symbolique de l'arithmétique, on peut convenir d'écrire la forme algébrique

$$ax^2 + bx + c,$$

de la manière suivante :

$$a \quad b \quad c,$$

ou

$$c \quad b \quad a,$$

suivant que la fonction entière sera ordonnée suivant les puissances décroissantes ou croissantes de la lettre ordonnatrice. M. Philippof adopte la deuxième convention et supprime purement et simplement la lettre ordonnatrice qu'il considère comme un encombrement et une superfluité de l'écriture algébrique. Celle-ci, déjà symbolique, devient donc, dans l'écriture proposée, plus symbolique encore; en un mot, c'est un symbole au-dessus du symbole ordinaire.

Lorsqu'on veut expliciter les signes des coefficients, on place le signe — au-dessus du coefficient négatif considéré et l'on écrit, par exemple,

$$3 - 5x + 4x^2 \equiv 3 \quad \bar{5} \quad 4,$$
$$5 + 3x^2 \equiv 5 \quad 0 \quad 3,$$

etc. Sans doute, l'écriture est moins explicite; mais elle gagne en rapidité ce qu'elle a perdu, pour les yeux, en clarté. Il ne faut pas d'ailleurs, au moins *à priori*, se révolter contre ces notations abrégées (*). Il convient seulement, croyons-nous, de les soumettre à la pratique pour voir si, oui ou

---

(*) L'expression (citation déjà faite à titre de curiosité; C. M. S, t. I; p. 119.)

$$\frac{2b^3 - d^3}{zb - 3d^2},$$

s'écrivait autrefois

$$\frac{b \text{ cub. bis} - d \text{ cub}}{z \text{ in } b - d \text{ q ter}};$$

(V. *Journal Sp.*, 1883, p. 17, *lettre de Fermat à Mersenne.*)

On peut supposer, croyons-nous, que la notation des exposants, proposée par Descartes, malgré tous ses avantages, a dû gêner, au début,

non, on effectue, avec elles, plus vite, et plus sûrement, les calculs algébriques.

Voici quelques exemples, choisis parmi les plus simples, pour qu'ils soient saisis plus vite, des calculs effectués par la méthode de M. Philippof.

1° On propose de multiplier :

$$1 + 5x^2 \quad \text{et} \quad 2 + x.$$

On écrit les symboles correspondants et on effectue la multiplication suivante

$$\begin{array}{rrrr} & 1 & 0 & 5 \\ & & 2 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 10 & \underline{0} \\ \hline 2 & 1 & 10 & 5 \end{array} \qquad \text{(A)}$$

Le résultat s'écrit, symboliquement,

$$2 \quad 1 \quad 10 \quad 5\,;$$

ou, si l'on veut revenir à la forme explicite,

$$2 + x + 10x^2 + 5x^3.$$

Mais ce calcul même, ou plutôt sa représentation figurative, se trouve encore modifié et simplifié par la convention suivante.

Au lieu d'écrire les multiplications partielles comme on le fait en arithmétique et comme le rappelle le tableau (A), observant que le zéro qui est souligné est un signe inutile ;

---

ceux qui étaient familiarisés avec l'ancienne notation; elle n'en a pas moins fait son chemin.

Pour citer un autre exemple moins ancien et qui sera mieux adapté à notre pensée, qui ne sait tous les services que les notations abrégées rendent aujourd'hui à la géométrie analytique. Elles étaient pourtant, si nous nous rappelons bien, fort peu employées, il y a de cela quelques années; les élèves qui ont un penchant très marqué pour les notations explicites, se sont pourtant peu à peu habitués à cette nouvelle écriture qui est aujourd'hui, et avec raison, fort appréciée. La notation de M. Philippof, je crois pouvoir le lui prédire en toute certitude, ne triomphera pas, de longtemps, des habitudes prises; mais si elle porte vraiment avec elle une simplification notable des calculs algébriques, qu'il se rassure, elle percera; lentement peut-être mais sûrement.

A propos de la notation cartésienne des exposants, citée plus haut, le mérite de son invention paraît remonter au géomètre Estienne de la Roche qui vivait au XVIe siècle. On pourra consulter, sur ce point historique intéressant, une note publiée dans les *Nouvelles Annales*, 1847, p. 35.

qu'à ce titre il doit être rejeté de l'écriture, si l'on veut rendre celle-ci aussi rapide que possible, M. Philippof propose de substituer à l'écriture habituelle des multiplications, écriture qui conduit à la *forme parallélogramme*, une disposition de *forme rectangulaire* et il représente la multiplication précédente de la manière suivante

$$\begin{array}{cccc|c}
 & 1 & 0 & 5 & \\
 & & 2 & 1 & \\
\hline
 & 2 & 0 & 10 & A \\
 & 1 & 0 & 5 & B \\
\hline
2 & 1 & 10 & 5 & C
\end{array}$$

mais il effectue les additions en prenant la somme des nombres écrits dans les colonnes obliques et, ajoutant A à B, il obtient le nombre C écrit sous le nombre B comme l'indique le tableau ci-dessus; il faut seulement commencer la multiplication par le premier chiffre à gauche du multiplicateur.

2° Pour mieux faire comprendre ces conventions, prenons un deuxième exemple. Soit proposé d'effectuer la multiplication :

$$(1 + 2x - x^2)(1 + 3x - x^3)$$

et prenons la notation symbolique de M. Philippof.

Nous formons alors le tableau suivant

$$\begin{array}{cccc}
1 & 3 & 0 & \bar{1} \\
 & 1 & 2 & \bar{1} \\
\hline
1 & 3 & 0 & \bar{1} \\
2 & 6 & 0 & \bar{2} \\
\bar{1} & \bar{3} & 0 & 1
\end{array}$$

on effectue ensuite l'addition par colonnes obliques et l'on a les coefficients cherchés :

$$1, \quad 3 + 2, \quad 0 + 6 - 1, \quad -1 + 0 - 3, \quad -2 + 0, \quad 1;$$

finalement, le résultat s'écrit symboliquement

$$(1 \quad 3 \quad 0 \quad \bar{1})(1 \quad 2 \quad \bar{1}) = (1 \quad 5 \quad 5 \quad \bar{4} \quad \bar{2} \quad 1).$$

On peut ensuite revenir, le résultat une fois trouvé, à la notation explicite.

3° Proposons-nous encore le calcul du carré de

$$a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Nous écrivons

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ \hline a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2 \end{array} \qquad \text{(B)}$$

Nous effectuons ensuite l'addition par colonnes obliques et nous avons, sous forme explicite, le résultat suivant

$$a^2 + 2abx + (b^2 + 2ac)x^2 + (2bc + 2ad)x^3 + (c^2 + 2bd)x^4 + 2cdx^5 + d^2x^6,$$

On peut d'ailleurs, pour les élévations au carré, simplifier notablement l'écriture ci-dessus, en observant, comme le fait M. Philippof, que le tableau (B) étant nécessairement symétrique par rapport à la diagonale principale (a^2, b^2, c^2, d^2), il suffit de doubler les éléments qui sont placés au-dessous de cette diagonale; on dispose alors le calcul, sous forme triangulaire, suivant l'expression de M. Philippof, de la manière suivante :

$$\begin{array}{lllll} (a \quad b \quad c \quad d)^2 = & a^2 & & & \\ & 2ab & b^2 & & \\ & 2ac & 2bc & c^2 & \\ & 2ad & 2bd & 2cd & d^2 \end{array}$$

et l'on effectue encore l'addition par colonnes obliques.

La brochure de M. Philippof traite ensuite, naturellement, des autres opérations élémentaires de l'algèbre : la division, l'extraction des racines carrées, la puissance des polynômes. L'espace me manque ici pour suivre l'auteur dans ces chapitres divers; il faudrait presque reproduire la brochure elle-même. J'ai préféré, pour faire connaître l'idée de M. Philippof, m'attacher à l'application que l'auteur en a faite à la multiplication. Je ne sais si cette idée est neuve et si quelque autre mathématicien ne l'a pas déjà proposée; mais elle est certainement curieuse et je la crois utile. Je puis affirmer dans tous les cas que, bornée à la multiplication, elle conduit au résultat plus rapidement et plus sûrement que la méthode ordinaire; on peut essayer, comme j'ai tenu à le faire sur des exemples un peu compliqués, l'emploi

successif des deux méthodes, l'avantage appartient, incontestablement, à celle de M. Philippof.

G. L.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DES DÉTERMINANTS contenant 299 exercices, par L. Leboulleux, licencié ès sciences, professeur de mathématiques à l'Université de Genève *(Librairie Delagrave* 1884 ; Prix : 3 francs*)*. Le traité de M. Leboulleux est conçu dans le même esprit que celui de M. Mansion, sur le même sujet, ouvrage dont nous avons rendu compte autrefois (*). Comme celui-ci, il n'aborde pas immédiatement la théorie générale des déterminants telle qu'on l'expose ordinairement dans les cours de mathématiques spéciales, en attaquant de prime abord le tableau de n^2 éléments. Le lecteur se familiarise peu à peu avec l'idée du déterminant et avec les principes du calcul algébrique correspondant par de nombreux exercices sur les déterminants à 4 ou 9 éléments.

Le livre de M. Leboulleux renferme un très grand nombre d'exercices accompagnés, dans la plupart des cas, d'une solution développée ou, tout au moins, indiquée. Nous recommandons particulièrement cet ouvrage à ceux qui, placés loin d'un enseignement technique, éprouveraient quelque difficulté à s'assimiler l'esprit de ce puissant algorithme, qui constitue aujourd'hui la base de notre enseignement classique.

G. L.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

(Session d'Ajaccio.)

24 juin 1885. — I. Dans un triangle rectangle ABC dont on connaît les trois côtés a, b, c on mène la perpendiculaire AD du sommet de l'angle droit sur l'hypothénuse BC, ensuite on mène du point D la perpendiculaire DE sur AC, puis de E la perpendiculaire EF sur l'hypo-

(*) *Journal de Math. Spéc.* (1884, p. 22). La méthode d'exposition adoptée par MM. Mansion et L. Leboulleux est aussi celle que l'on trouve dans un article intitulé : *Principes élémentaires sur les déterminants* (*Journal de Math. Elém.*, 1877 ; t. I, p. 5) et dans l'*Algèbre élémentaire* de M. J. Bourget (*Librairie Delagrave*, 1880 ; p. 133).

thénuse et ainsi de suite indéfiniment. On demande de calculer les longueurs des lignes AD, DE, EF, etc. On demande aussi de calculer la somme AD + DE + EF + ... On appliquera les formules obtenues au cas où $AB = 3^m$ et $AC = 5^m$.

II. On donne deux droites AB et CD par leurs projections $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$; on donne aussi un point (oo') situé sur la ligne de terre xy. Trouver l'intersection du plan qui passe par la droite AB et le point O avec le plan qui passe par la droite CD et qui est parallèle à xy.

(Session de Bastia.)

1er juillet 1885. — I. Démontrer l'identité

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = 2.\frac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x}.$$

II. Dans un cercle O de rayon R on inscrit trois cercles égaux A, B, C. Ces trois cercles sont tangents deux à deux et sont tous trois tangents intérieurement au cercle O. Trouver le rayon de ces trois cercles et l'aire de la surface curviligne EFG comprise entre les trois cercles et limitée par les arcs EG, GF, FE compris sur chaque cercle entre les points de contact de ce cercle avec les deux autres.

(Session de Nice.)

I. Dans un cercle de rayon R, on inscrit des triangles tels que ABC dans lesquels le côté CA est double de BC. Si l'on désigne par S la surface de l'un de ces triangles et par a la longueur de BC on demande de trouver entre quelles limites est compris le rapport $\frac{S}{a^2}$, lorsque R reste constant et que a varie.

II. Un parallélogramme pesant et homogène, dont le poids est P, est supporté par quatre forces verticales appliquées aux quatre sommets A, B, C, D. La force appliquée en A est égale à $\frac{P}{6}$. Trouver les forces appliquées aux autres sommets.

ÉCOLE NATIONALE FORESTIÈRE (1886)

Mathématiques.

I. Si, d'un point A, extérieur à une droite, on mène à cette droite la perpendiculaire AB et les obliques AC, AD, AE dont les longueurs croissent successivement d'une même quantité, les distances BC, CD, DE vont en diminuant.

II. Prouver que le volume d'une tranche sphérique limitée par deux plans parallèles situés du même côté du centre est équivalent à la différence entre le cylindre de même hauteur que la tranche dont la base serait un grand cercle de la sphère, et le tronc de cône de même hauteur dont les bases auraient respectivement pour rayons les distances du centre de la sphère aux deux plans qui limitent la tranche.

III. Une personne contracte un emprunt remboursable au moyen de deux annuités de 1,061 fr. 80 c.; on a calculé qu'il serait aussi avantageux pour elle de payer quatre annuités de 561 fr. 80 c. On demande à combien on évalue le taux de l'intérêt. Le premier paiement s'effectue un an après le jour de l'emprunt.

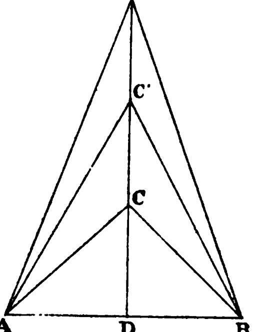
(Durée de la composition : 3 heures.)

Trigonométrie et calcul logarithmique.

I. Sur une droite AB comme base, on décrit trois triangles isocèle ABC, ABC′, ABC″ dont les hauteurs sont respectivement

$$CD = \frac{1}{2} AB, \quad C'D = AB, \quad C''D = \frac{3}{2} AB$$

Démontrer que la somme des angles aux sommets $\widehat{ACB} + \widehat{AC'B} + \widehat{AC''B}$ vaut deux angles droits.



II. Dans le trapèze ABCD, on a

$$\left.\begin{array}{l} AB = 2801^m\,87 \\ CD = 1925\ \ 34 \end{array}\right\} \textit{(bases)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} AC = 1024\ 448 \\ BD = 1227\ 142 \end{array}\right\} \textit{(côtés)}.$$

On demande de calculer les angles et la surface.

(Durée de la composition : 3 heures.)

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

(SECTION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES)

Concours de 1886. — Épreuves préparatoires

Algèbre et Trigonométrie (2 juillet).

Soit, dans un plan, le pentagone non convexe ABCDE, où les angles BAE et BCD sont supposés égaux. On donne leur grandeur commune θ, ainsi que les longueurs des côtés, savoir :

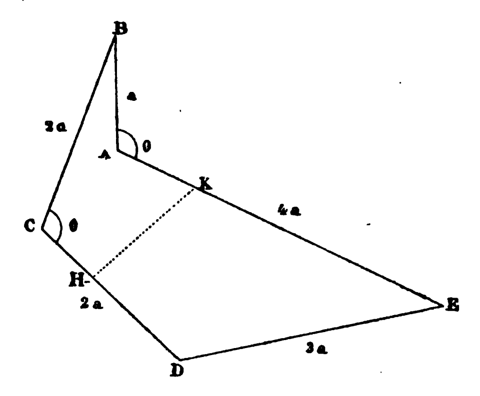
$$AB = a, \qquad BC = CD = 2a, \qquad DE = 3a, \qquad EA = 4a.$$

Sur EA, à partir du sommet E, on porte une longueur EK égale à DE, et sur CD, à partir du sommet D, une longueur DH égale à la moitié de DE.

1° Calculer la différence $\overline{BE}^2 - \overline{BD}^2$ des carrés des distances du sommet B aux sommets E et D.

2° Résoudre le quadrilatère DHKE.

3° Les bissectrices des quatre angles de ce quadrilatère ont un point commun O : calculer le rayon de la circonférence qui, passant par les points D et O, a son centre sur le côté DE.



Application. — Effectuer numériquement la résolution du quadrilatère en supposant

$$a = 1, \qquad \theta = 109^\circ\, 46'\, 38''.$$

Géométrie descriptive (3 juillet).

On donne deux droites OA, OB, se coupant en un point O, et telles que l'angle AOB soit aigu. On considère la surface conique engendrée par une droite OM qui tourne autour du point O en formant avec OA et OB des angles MOA et MOB complémentaires.

Représenter le solide limité par cette surface et par deux plans menés perpendiculairement aux deux droites à la même distance du sommet O.

On prendra l'un de ces plans pour plan horizontal de projection, et le plan des deux droites pour plan vertical. On supposera le solide éclairé par des rayons parallèles à la ligne de terre, et les ombres seront indiquées par des hachures.

Mécanique (5 juillet).

Une planche rectangulaire homogène AB de longueur l et de poids P peut tourner autour d'un de ses petits côtés fixé horizontalement contre un mur vertical AC. En un point B du côté opposé est attaché un fil BCAQ, de poids négligeable, qui, passant sur une très petite poulie C placée sur le mur à une distance h de la charnière, retombe verticalement en supportant un poids Q. Sur la planche repose un corps cubique d'arête a, qui s'appuie contre le mur par une arête. Ce cube n'est pas homogène, mais le poids spécifique varie proportionnellement au carré de la distance à la face de contact; il est K à l'unité de distance. Les points B, C et les centres de gravité de la planche et du cube sont d'ailleurs dans un même plan vertical normal au mur.

On demande de calculer le poids Q qui produit l'équilibre. Calculer ussi les réactions.

Outre $AB = l$, P, $AC = h$, a et K, on connaît l'angle $BAC = \alpha$ que fait la planche avec le mur.

On fera abstraction des frottements, et on regardera le fil comme parfaitement flexible (*).

QUESTIONS PROPOSÉES

217. — Démontrer que si l'on a

$$a + b + c = 0,$$

les deux quantités :

$$a^3b + b^3c + c^3a,$$
$$a^3c + b^3a + c^3b,$$

sont égales et que chacune d'elles, changée de signe, représente un carré parfait. *(G. L.)*

218. — B et B′ désignant les aires des bases parallèles d'un tronc de pyramide quelconque, la section B″, parallèle et équidistante de ces bases, est la moyenne arithmétique de leurs moyennes arithmétique et géométrique.

(Glorget.)

219. — Soient H l'orthocentre et H_0 le point réciproque dans le triangle ABC ; si l'on pose

$$HAH_0 = \alpha, \qquad HBH_0 = \beta, \qquad HCH_0 = \gamma,$$

démontrer que l'on a

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = 0.$$

(Boutin.)

220. — Dans un triangle, on a:

1° $$\Sigma \frac{\cos B - \cos C}{p - a} = 0,$$

2° $$\Sigma (p - a)(b - c)\cos A = 0,$$

3° $$(p - c)(b + c)\cos A + p(a - c)\cos B = (p - a)(a + b)\cos C.$$

(G. L.)

(*) Énoncés communiqués par M. Monsallut, professeur au collège de Saint-Jean-d'Angély.

221. — Dans le triangle ABC, les côtés AB et AC sont égaux; I est le milieu de la base BC. Si l'on porte sur le côté BA la longueur $AA' = m.BA$ et sur le côté BC la longueur $CC' = p.BC$; si, de plus, les perpendiculaires respectivement élevées à AC et à A'C' aux points C et C' coupent la droite AI aux points D et D' on a

$$\frac{ID'}{ID} = \frac{(1+2p)(1+2p-m)}{1+m}.$$

Corollaire. — Soit I' le pied de la perpendiculaire abaissée de A' sur BC. Si l'on prend $CC' = II'$, la perpendiculaire élevée en C' à A'C' passe par le point D. *(D'Ocagne.)*

222. — Trouver la condition que doit vérifier le paramètre α pour que les deux polynômes U et V,

$$U \equiv x^4 \sec^2\alpha - 2x \operatorname{tg}\alpha + 1,$$
$$V \equiv x^4 - 2x^3 \operatorname{tg}\alpha + \sec^2\alpha$$

admettent un diviseur commun du second degré.

(B. Hanumenta Rau),
(Directeur de l'École Normale de Madras.)

223. — ABCP, DEFQ sont deux circonférences concentriques; ABC, DEF deux triangles équilatéraux quelconques, inscrits dans ces deux circonférences; P et Q des points pris sur chacune de ces circonférences. Démontrer que l'on a

$$\overline{QA}^4 + \overline{QB}^4 + \overline{QC}^4 = \overline{PD}^4 + \overline{PE}^4 + \overline{PF}^4.$$

(G. Russo, à Catanzaro.)

224. — a, b, c étant trois entiers satisfaisant à la condition

$$ab + bc + ca = 1$$

prouver que

$$\Sigma(ab-1)(a+1)(b+1)(c-1) = M(a+b+c+1).$$

(Catalan.)

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 13038-6.

NOTES A PROPOS DU CERCLE
DES NEUF POINTS

Par M. **E. Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

Soit un triangle ABC, soient d', d'_a, d'_b, d'_c les points de contact du cercle des neuf points respectivement avec le cercle inscrit et avec les cercles ex-inscrits au triangle ABC.

On sait (voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1886, pages 122 et suivantes), que les coordonnées normales de ces points sont :

pour d' : $\frac{r_a}{a}(r_b - r_c)^2$, $\frac{r_b}{b}(r_c - r_a)^2$, $\frac{r_c}{c}(r_a - r_b)^2$

ou $\sin^2\left(\frac{B-C}{2}\right)$, $\sin^2\left(\frac{C-A}{2}\right)$, $\sin^2\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

Pour d'_a : $-\frac{r}{a}(r_b - r_c)^2$, $\frac{r_c}{b}(r + r_b)^2$, $\frac{r_b}{c}(r + r_c)^2$

ou

$-\sin^2\left(\frac{B-C}{2}\right)$, $\cos^2\left(\frac{C-A}{2}\right)$, $\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)$, etc.,

r, r_a, r_b, r_c étant les rayons du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits.

L'équation de la tangente en d', commune au cercle inscrit et au cercle des neufs points, est :

$$\frac{a}{b-c}\xi + \frac{b}{c-a}\eta + \frac{c}{a-b}\zeta = 0$$

et un point quelconque de cette tangente peut être représenté par les coordonnées :

$$\frac{(\delta - a)(b-c)^2}{a}, \quad \frac{(\delta - b)(c-a)^2}{b}, \quad \frac{(\delta - c)(a-b)^2}{c}$$

où δ a une valeur variable.

L'équation de la tangente commune en d'_a au cercle des neuf points et au cercle ex-inscrit de rayon r_a est :

$$\frac{a}{c-b}\xi - \frac{b}{a+c}\eta + \frac{c}{a+b}\zeta = 0$$

et un point quelconque de cette tangente peut être représenté par les coordonnées :

$$\frac{(\delta - a)(b - c)^2}{a}, \quad \frac{(\delta + b)(a + c)^2}{b}, \quad \frac{(\delta + c)(a + b)^2}{c}, \text{ etc.}$$

On sait que les tangentes au cercle des neuf points en d', d'_a, d'_b, d'_c touchent aussi l'ellipse maxima inscrite dans le triangle, ellipse dont l'équation est :

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 - 2bc\beta\gamma - 2ac\alpha\gamma - 2ab\alpha\beta = 0.$$

Soient respectivement μ, μ_a, μ_b, μ_c les points de contact de ces tangentes avec cette ellipse, les coordonnées de ces points correspondent à la valeur de $\delta = \infty$ et sont :

pour μ : $\quad \dfrac{(b - c)^2}{a}, \quad \dfrac{(c - a)^2}{b}, \quad \dfrac{(a - b)^2}{c}$

pour μ_a : $\quad \dfrac{(b - c)^2}{a}, \quad \dfrac{(a + c)^2}{b}, \quad \dfrac{(a + b)^2}{c}$, etc.

Les droites $A\mu_a$, $B\mu_b$, $C\mu_c$ se coupent au point ρ :

$$\frac{(b + c)^2}{a}, \quad \frac{(a + c)^2}{b}, \quad \frac{(a + b)^2}{c},$$

c'est-à-dire que les triangles ABC et $\mu_a\mu_b\mu_c$ sont homologiques et ont ρ pour centre d'homologie.

L'équation de $\mu_b\,\mu_c$ est :

$$a\,(a^2 + cb)\,\alpha - b^2\,(b + c)\,\beta - c^2\,(b + c)\,\gamma = 0.$$

L'axe d'homologie de ABC et de $\mu_a\,\mu_b\,\mu_c$ est donc la droite :

$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0,$$

qui est la droite *réciproque* (suivant la dénomination adoptée par M. G. de Longchamps) de la droite :

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

qui joint les pieds des bissectrices extérieures.

Si A′, B′, C′ sont, sur chaque côté, les symétriques par rapport au milieu de ce côté des pieds des bissectrices intérieures :

ABC, A′B′C′ sont homologiques.

Le centre d'homologie est : $\dfrac{1}{a^2}, \dfrac{1}{b^2}, \dfrac{1}{c^2},$

et l'axe d'homologie précisément la droite :

$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0.$$

L'équation de $\mu\,\mu_a$ est :

$$a\,(bc - a^2)\,\alpha - (c - b)\,b^2\beta + (c - b)\,c^2\gamma = 0.$$

Remarquons que si $a^2 = bc$, cette droite passe par le sommet A.

Les deux triangles ABC, $\mu\, \mu_c\, \mu_b$ sont homologiques et les trois droites $A\mu$, $B\mu_c$ $C\mu_b$ se coupent en ρ_a :

$$\frac{(b+c)^2}{a}, \frac{(c-a)^2}{b}, \frac{(a-b)^2}{c}$$

leur centre d'homologie.

L'axe d'homologie est :

$$-\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0,$$

droite réciproque de

$$-\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

laquelle droite joint les pieds sur AC et sur AB des bissectrices intérieures des angles opposés et passe aussi par le pied sur BC de la bissectrice extérieure partant par A.

On aurait de même ρ_b, ρ_c :

Cela posé, on voit facilement :

Que ABC, $\rho_a\, \rho_b\, \rho_c$ ont pour centre d'homologie le point μ déjà rencontré;

Que ABC, $\rho\, \rho_c\, \rho_b$ ont pour centre d'homologie le point μ_a déjà rencontré, etc.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES CERCLES DE TÜCKER

Par M. **Émile Vigarié**, élève à l'École des Mines.

1. Définition. — Soit ABC un triangle donné, H_a, H_b, H les pieds des hauteurs et K le point de Lemoine.

Il y a une infinité de triangles A′B′C″ homologiques avec ABC, ayant K pour centre d'homologie et qui sont homothétiques avec H H_bH_c. Les côtés des triangles A″B′C″ coupent les côtés de ABC ou ses prolongements en six points qui sont sur un même cercle. On obtient ainsi un réseau de cercles que M. Neuberg a proposé (*Reprint of the Educational Times*, vol. XLIII, p. 81-85) d'appeler *Cercles de Tücker*.

Les cercles de Tücker ont été rencontrés par plusieurs auteurs, c'est ainsi que leur existence a été signalée par MM :

E. Lemoine, Associat. franç. Congrès de Lyon (1873). — *Mathésis*, 1884, p. 201-204.

J. Neuberg, *Mathésis*, 1881, p. 15, 59, 187.

H. Taylor, *Relations of the intersections of a cercle with a triangle.* (Proceedings of the London Math. Soc., vol. XV, 1884).

Enfin M. Tücker les a retrouvés sans connaître les travaux antérieurs (A group of circles, *Quarterly Journal*, vol. XX, n° 77, 1883) ; c'est pourquoi ils portent son nom.

Nous allons faire connaître les principales propriétés des cercles de Tücker, en adoptant pour les démonstrations, un ordre commode, bien qu'étant peut-être peu logique.

2. — Supposons que

B″C″ coupe	BC en X,	CA en A_c,	AB en A_b ;
C″A″ —	CA — Y,	AB — B_a,	BC — B_c ;
A″B″ —	AB — Z,	BC — C_b,	CA — C_a.

Les droites A_bA_c, B_aB_c, C_aC_b étant parallèles aux côtés du triangle $H_aH_bH_c$, sont aussi parallèles aux côtés du triangle A′B′C′ formé en menant par les sommets de ABC des tangentes au cercle circonscrit ; elles sont donc antiparallèles à BC, AC, AB.

3. — *Les droites* C_aB_a, C_bA_b, A_cB_c *sont respectivement parallèles à* BC, AC, AB.

En effet, on a :

$$\frac{AA_c}{AB}=\frac{AA_b}{AC}, \qquad \frac{AB}{BB_c}=\frac{BC}{BB_a},$$

ou

$$\frac{AA_c}{BB_c}=\frac{BC}{AC}\times\frac{AA_b}{BB_a}. \qquad (1)$$

Soit α, β, γ les pieds des médianes antiparallèles ou symedianes de ABC ; les triangles $C''\gamma A_b$, $C'\gamma A$; $C'\gamma B$, $C''\gamma B_a$ sont semblables et donnent :

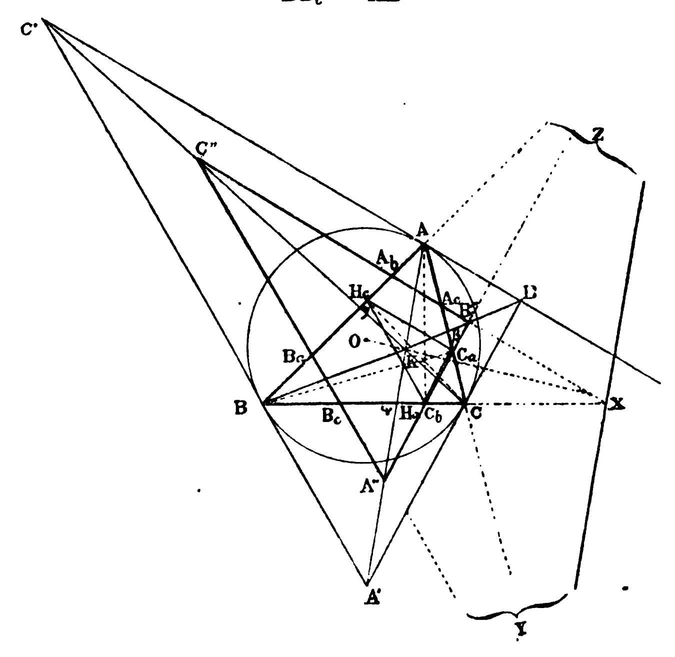
$$\frac{AA_b}{A\gamma}=\frac{C'C''}{C'\gamma}=\frac{BB_a}{B\gamma};$$

d'où

$$\frac{AA_b}{BB_a}=\frac{A\gamma}{B\gamma}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{\overline{CA}^2}{\overline{CB}^2}.$$

Par suite (1) devient :

$$\frac{AA_c}{BB_c} = \frac{AC}{AB},$$



ce qui montre que B_cA_c est parallèle à AB. On prouverait de la même manière que B_aC_a, A_bC_b sont parallèles respectivement à BC, AC.

4. — *Les droites* A_bA_c, B_aB_c, C_aC_b *sont égales.*

Car elles sont deux à deux les côtés non parallèles des trapèzes isocèles $A_cA_bB_aB_c$, $B_aB_cC_bC_a$, $C_bC_aA_aA_b$.

5. — ***Les six points*** A_b, A_c, C_a, C_b, B_c, B_a, ***sont six points d'un même cercle*** T ***dont le centre*** ω' ***est sur la droite qui joint le point*** K ***au centre*** O ***de la circonférence*** ABC.

En effet, les droites A_bA_c, B_aB_c, C_aC_b étant antiparallèles aux côtés du triangle ABC, sont divisées en deux parties égales par les symédianes aux points α'', β'', γ'' ; les triangles

othétiques par rapport à K, les points
A, B, C sont les points de contact du
et le centre est situé sur la droite
$_aB_c$, C_aC_b étant égales sont par suite
circonférence ayant son centre sur

désignerons par la lettre T sont les
t donc dire que :
cercles de Tücker est la droite qui joint
triangle ABC *au centre de la circon-*
rement dit : *Le lieu des centres des*
mètre de Brocard. *(A suivre.)*

LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

JES ET LES POTENTIELS D'ORDRE *p*

. de Longchamps.

ite, voir p. 177.)

---

diverses pour le deuxième
me potentiel est celui qui se présente
érie; c'est, dans la loi présente,
us simple et, pour ce motif même,

ter un instant sur ce point et mon-
par des constructions diverses, dé-
, son deuxième potentiel.

— Prenons d'abord la construction
e tout à l'heure pour un cas plus

é, M′ le point inconnu, associé du
M. La détermination de M′ revient
ué sur BC, et tel que l'on ait

$$\frac{B\mu'}{C\mu'} = \frac{\overline{B\mu}^2}{\overline{C\mu}^2}.$$

Soit m le point isotomique de μ; l'égalité précédente peut s'écrire

$$\frac{B\mu'}{C\mu'} = \frac{\left(\frac{B\mu}{C\mu}\right)}{\left(\frac{Bm}{Cm}\right)}.$$

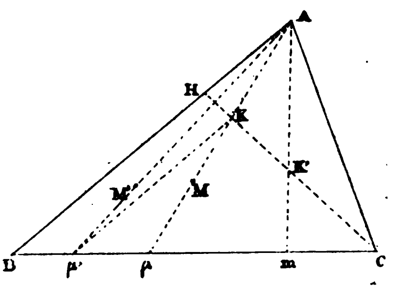
Le second membre représente le rapport anharmonique des points (B, C, μ, m); ayant mené CH de telle façon que

$$CK' = K'H,$$

on a

$$\frac{B\mu'}{C\mu'} = \frac{HK}{KC}.$$

La droite $K\mu'$ est donc parallèle à AB; le point μ' étant ainsi déterminé, $A\mu'$ et les deux autres droites analogues concourent au point inconnu M'.



Deuxième construction. — La construction précédente ne demande que l'emploi de la règle et de l'équerre; celle que nous allons faire connaître maintenant exige que le cercle γ, circonscrit au triangle, soit tracé; mais, abstraction faite de ce petit inconvénient, elle nécessite un nombre moindre de lignes.

Comme on vient de l'observer, la question revient au fond à celle-ci: *étant donné sur* BC *un point* μ, *trouver un point* μ' *tel que l'on ait*

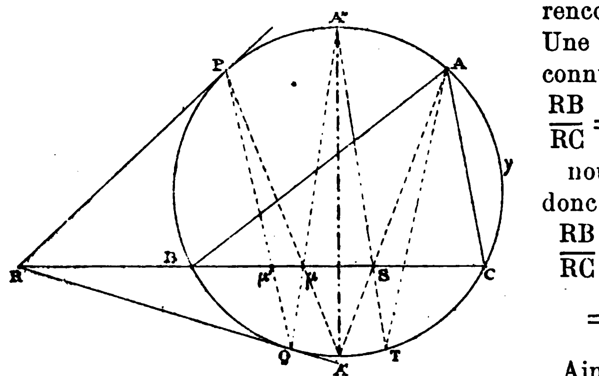
$$\frac{B\mu'}{C\mu'} = \left(\frac{B\mu}{C\mu}\right)^2.$$

Soit A'A" le diamètre de γ qui est perpendiculaire sur BC; on joint le point μ aux extrémités A', A" de ce diamètre; ces droites rencontrent γ en P et Q; la droite PQ coupe BC au point cherché μ'.

En effet, la droite PA' étant bissectrice de $\widehat{BPC}$, on a

$$\frac{BP}{CP} = \frac{B\mu}{C\mu}.$$

Menons à γ la tangente en P et soit R le point où elle rencontre BC. Une propriété connue donne



$$\frac{RB}{RC} = \left(\frac{PB}{PC}\right)^2,$$

nous avons donc

$$\frac{RB}{RC} = \left(\frac{B\mu}{C\mu}\right)^2 = \frac{B\mu'}{C\mu'}.$$

Ainsi le point μ' est le conjugué harmonique de R, par rapport à BC.

En appliquant le même raisonnement au triangle BQC dans lequel QμA' est une bissectrice, on verrait encore que la tangente en Q coupe BC au point conjugué harmonique du point inconnu μ', c'est-à-dire au point R.

D'après cela, PQ est donc la polaire de R et, pour conclure, on peut donc dire que PQ coupe BC précisément au point cherché.

Par exemple, si l'on considère le point de Lemoine

$$\frac{\alpha'}{a^2} = \frac{\beta'}{b^2} = \frac{\gamma'}{c^2},$$

et le centre du cercle inscrit

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c},$$

en appliquant la construction précédente, S étant le pied de la bissectrice de l'angle BAC, le point T étant déterminé comme l'indique la figure, la droite AT passe par le point de Lemoine. Cette remarque incidente donne donc lieu à l'énoncé suivant :

Soient un triangle ABC *et son cercle circonscrit* γ; *la droite qui joint le point milieu de l'arc* BAC, *au pied* S *de la bissectrice de l'angle* BAC *coupe de nouveau* γ *en un certain point* T; *la droite* AT *et les deux autres droites analogues concourent au point de Lemoine.*

TROISIÈME CONSTRUCTION. — Enfin voici une troisième construction qui nous paraît encore assez simple pour être indiquée ici.

Prenons le point m *conjugué harmonique de* μ, *puis* ω *milieu de* $m\mu$, *enfin* μ' *conjugué harmonique de* ω, *par rapport à* BC; μ' *est le point cherché et l'on a*

m ω B μ' μ C

$$\text{(A)} \qquad \frac{\mu'B}{\mu'C} = \left(\frac{\mu B}{\mu C}\right)^2$$

En effet, posons

$$\frac{\mu B}{\mu C} = K,$$

nous en tirons

$$\frac{\mu B}{BC} = \frac{K}{K+1}. \qquad (1)$$

Nous avons aussi

$$\frac{mB}{mC} = K,$$

les longueurs mB, mC étant prises en valeur absolue par suite

$$\frac{mB}{BC} = \frac{K}{1-K}. \qquad (2)$$

Les égalités (1) et (2) donnent

$$\frac{m\mu}{BC} = \frac{2K}{1-K^2}$$

ou

$$\frac{\omega\mu}{BC} = \frac{K}{1-K^2}. \qquad (3)$$

Enfin (1) et (3) prouvent que

$$\frac{\omega B}{BC} = \frac{K}{1+K}\left(\frac{1}{1-K} - 1\right) = \frac{K^2}{1-K^2}$$

égalité qui donne

$$\frac{\omega B}{\omega C} = K^2 = \left(\frac{\mu B}{\mu C}\right)^2.$$

Puisque μ' est le conjugué harmonique de ω, μ' est donc bien le point qui partage le segment BC de telle sorte que l'égalité (A) soit vérifiée.

17. Potentiels proprement dits. — Mais nous allons, dans ce qui suit, particulariser les points potentiels en supposant

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c},$$

ce cas particulier étant celui qui présente un intérêt spécial dans la géométrie du triangle.

Le premier potentiel est alors le centre du cercle inscrit, le deuxième potentiel est le point de Lemoine.

PROBLÈME. — *Connaissant le potentiel d'ordre* p, *construire le otentiel d'ordre* p + 1 (*).

Soit M un point ayant pour coordonnées

$$a^p, \qquad b^p, \qquad c^p;$$

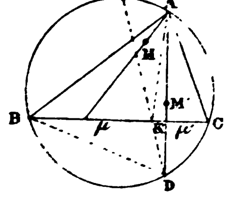
Si nous prenons le réciproque M′ de ce point, les coordonnées de M′ sont

$$\frac{1}{a^p}, \qquad \frac{1}{b^p}, \qquad \frac{1}{c^p}$$

et les distances de M′ aux trois côtés sont proportionnelles à

$$\frac{1}{a^{p+1}}, \qquad \frac{1}{b^{p+1}}, \qquad \frac{1}{c^{p+1}}:$$

La droite AM′ rencontre le cercle circonscrit en un certain point D que l'on joint, comme l'indique la figure, au point A′ milieu de l'arc BAC ; DA′ rencontre BC en K′ et l'on a



$$\frac{BK'}{CK'}=\frac{BD}{DC}=\frac{\frac{1}{c^{p+1}}}{\frac{1}{b^{p+1}}}=\frac{b^p}{c^{p+1}}.$$

D'après cela, les droites telles que AK′ concourent en un point dont le réciproque est le potentiel de l'ordre $p+1$.

(*) Nous ne pensons pas que le langage dont nous nous servons ici puisse prêter à confusion et l'on comprend bien quelle différence il convient de faire entre le potentiel d'ordre p dont nous parlons maintenant et le potentiel d'ordre p, *associé d'un point donné*, que nous avons

D'après cette remarque générale on pourra donc de proche en proche construire tous les potentiels (*).

18. Rapprochement entre les potentiels et les réciproques de l'ordre p. — Il existe entre les potentiels d'ordre p dont nous nous occupons en ce moment et les réciproques d'ordre p dont nous avons placé plus haut un rapprochement évident. En observant que les coordonnées α_0, β_0, γ_0 du centre de gravité sont égales, les égalités

$$\frac{\alpha}{a^p} = \frac{\beta}{b^p} = \frac{\gamma}{c^p},$$

peuvent s'écrire

$$\frac{\alpha\alpha_0}{a^p} = \frac{\beta\beta_0}{b^p} = \frac{\gamma\gamma_0}{c^p}.$$

D'après cela nous pouvons dire que le potentiel d'ordre p d'un triangle ABC est, en même temps, le réciproque d'ordre p du centre de gravité. Les tracés généraux que nous avons indiqués pour la construction des réciproques d'ordre p pourraient donc s'appliquer à celle des potentiels d'ordre p, mais il n'est pas sans intérêt, vu l'importance des premiers potentiels, d'établir pour chacun d'eux des tracés particuliers permettant de fixer aussi rapidement que possible leur situation dans le plan du triangle de référence.

Nous avons examiné déjà le premier et le deuxième potentiel ; mais pour le motif que nous avons fait valoir,

---

considéré plus haut. Mais, pour éviter toute ambiguïté, nous répétons que *le potentiel d'ordre* p, *associé d'un point donné* (A, B, C) est celui dont les coordonnées sont (A^p, B^p, C^p); le mot plus simple *potentiel d'ordre* p (sans autre qualificatif) désigne le *potentiel proprement dit* point qui a pour coordonnées (a^p, b^p, c^p); a, b, c représentant les longueurs des côtés du triangle de référence.

(*) Voyez à ce propos la note bibliographique placée plus haut (*Journal*, p. 129) et qui serait peut-être, ici, mieux à sa place. Nous citerons encore, pour la compléter, une note de M. Poudra (*Problème sur les côtés d'un triangle élevés à des puissances données*; *N. A.*, 1856, p. 217), qui nous a été signalée par M. d'Ocagne (*Journal* 1885, p. 204); et une note, plus ancienne, *Construction géométrique du rapport* $\frac{a^p}{b^p}$ (*N. A*, 1844, p. 371).

nous voulons encore examiner particulièrement le troisième et le quatrième potentiel.

19. Le troisième potentiel. — Proposons-nous d'abord de déterminer la position du troisième potentiel. Nous avons

$$\frac{\alpha}{a^3} = \frac{\beta}{b^3} = \frac{\gamma}{c^3}, \qquad (1)$$

α, β, γ désignant les coordonnées du point cherché M. Soit M' le point inverse, de telle sorte que

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^2} = \frac{\beta\beta'}{b^2} = \frac{\gamma\gamma'}{c^2}. \qquad (2)$$

Les égalités (1) et (2) donnent

$$a\alpha' = b\beta' = c\gamma'.$$

Ainsi le point M' est le réciproque du centre du cercle inscrit et l'on peut dire que *le troisième potentiel s'obtient en prenant 1° le réciproque du centre du cercle inscrit, 2° l'inverse de ce réciproque.*

20 La quatrième potentiel. — Les premiers calculs que l'on entreprend sur les nombres a, b, c font apparaître, très rapidement, leurs quatrièmes puissances. Nous ne voulons pas, pour ce motif, quitter cette question des potentiels sans compléter les constructions que nous venons d'exposer par l'indication de celles qui sont relatives à la détermination du quatrième potentiel. La considération de ce point rentre dans celles qui nous paraissent constituer la base de la géométrie du triangle, et l'on peut d'ailleurs fixer sans avoir recours aux constructions générales sa position par un tracé particulier que nous allons faire connaître.

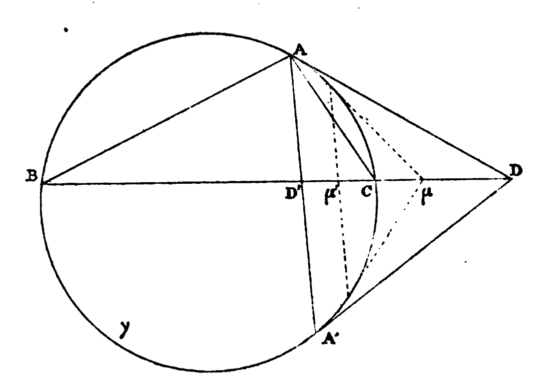
Considérons le triangle ABC, le cercle circonscrit γ et la tangente en A à γ; cette droite rencontre BC en D et nous avons

$$\frac{DC}{DB} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}.$$

Soit D' le conjugué harmonique de D; si nous prenons le milieu μ de DD' nous savons (§ 16) que

$$\frac{\mu C}{\mu D} = \frac{\overline{DC}^2}{\overline{DB}^2} = \frac{\overline{AC}^4}{\overline{AB}^4}.$$

D'après cela, en prenant μ' conjugué harmonique de μ par rapport à BC, nous voyons donc que la droite $A\mu'$ et les deux autres droites analogues concourent au quatrième potentiel.



On peut aussi déterminer la position de ce point ne prenant : 1° le réciproque du point de Lemoine ; 2° l'inverse de ce point réciproque.

En effet, les formules

$$\frac{\alpha}{a^2} = \frac{\beta}{b^2} = \frac{\gamma}{c^2}, \qquad \alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma', \qquad \frac{\alpha'\alpha''}{a^2} = \frac{\beta'\beta''}{b^2} = \frac{\gamma'\gamma''}{c^2},$$

donnent

$$\frac{\alpha''}{a^4} = \frac{\beta''}{b^4} = \frac{\gamma''}{c^4}.$$

21. Remarque. — En prenant deux points M, M′ dont les coordonnées sont

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}, \qquad \frac{\alpha'}{A'} = \frac{\beta'}{B'} = \frac{\gamma'}{C'};$$

on peut imaginer un point M″ associé à ces deux points par les formules

$$\frac{\alpha''}{A^p A'^q} = \frac{\beta''}{B^p B'^q} = \frac{\gamma''}{C^p C'^q}.$$

La construction du point M″ peut se faire en cherchant d'abord les points associés d'ordre p et q des points M et M′, on a ainsi deux points

$$\frac{\alpha_1}{A^p} = \frac{\beta_1}{B^p} = \frac{\gamma_1}{C^p} \qquad \frac{\alpha_2}{A'^q} = \frac{\beta_2}{B'^q} = \frac{\gamma_2}{C'^q},$$



égalités d'où l'on tire

$$\frac{\alpha''}{\alpha_1\alpha_2} = \frac{\beta''}{\beta_1\beta_2} = \frac{\gamma''}{\gamma_1\gamma_2}.$$

On détermine alors M' par la construction indiquée plus haut (§ 14); mais, naturellement, le tracé devient de plus en plus compliqué.

(A suivre.)

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (1886)

Épure du Concours d'admission (2 h. 1/2).

Solution par M. Ernest LEBON.

On donne un point A *sur la ligne de terre, un point* S *distant du plan horizontal de* 78^{mm}, *du plan vertical de* 51^{mm}, *et du point* A *de* 124^{mm}. *Construire le tétraèdre* SABC *dont la base* ABC *est sur le plan horizontal de projection, sachant que le plan* BSC *est perpendiculaire à l'arête* SA, *et que les angles dièdres* AB *et* AC *valent chacun* 68°. — *On aura soin de placer le point* A *le plus à gauche possible.*

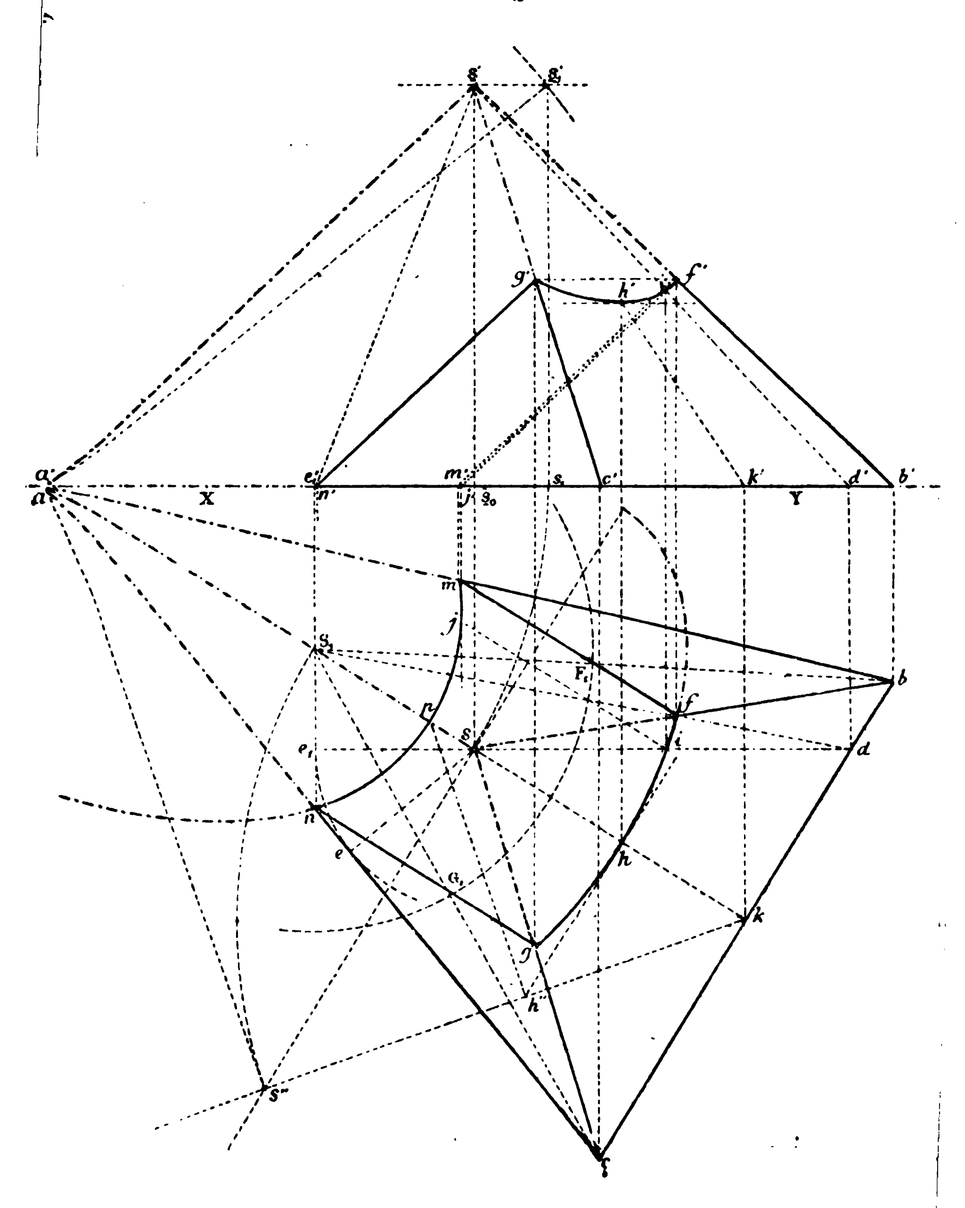
Construire l'intersection de cette pyramide avec le cylindre de révolution qui a SA *pour axe et pour rayon* 55^{mm}.

Dans la mise à l'encre, on supposera que le tétraèdre est seul et que le solide commun au cylindre et à la pyramide est enlevé.

Nous avons fait l'épure à l'échelle $\frac{2}{3}$.

Supposant que la droite as, $a's'$ est connue, rabattant cette droite en $a's'_1$ sur le plan vertical, on voit que pour obtenir les projections de S, il faut mener à XY, au-dessus et au-dessous de cette ligne, des parallèles aux distances 78^{mm} et 51^{mm}; couper la première en s'_1 par l'arc de centre a', de




s'
g'
g'
h'
f'
a'
a
X
e'
n'
m'
j'
s₀
s₁
c'
k'
Y
d'
b'
m
j
S₁
F₁
b
f
p
S
e₁
i
d
n
e
h
G₁
k
g
h''
s''
c

rayon égal à 124^{mm}; mener la ligne de rappel $s'_1 s_1$; couper la seconde en s par l'arc de centre a, de rayon $a's_1$; mener la ligne de rappel ss'.

La trace bc de la face BSC s'obtient en construisant la trace horizontale d'un plan perpendiculaire à as, $a's'$, au moyen de sa droite de front $s'd'$, sd.

Supposant que la trace ac de la face ASC est connue, on mène la perpendiculaire se à ac, on rabat le triangle rectangle Sse en $s's_0e'_1$ sur le plan vertical autour de la verticale Ss, et on obtient l'angle $s'e'_1s_0$, qui, par hypothèse, égale 68°; donc, après avoir mené la droite $s'e'_1$ faisant avec XY un angle de 68°, on a e'_1 sur XY; la trace cherchée est la tangente ae au cercle de centre s, de rayon égal à $s_0e'_1$. Cette tangente coupe bc en c. La trace ab de la face ASB est symétrique de ac par rapport à as.

On achève facilement la représentation du tétraèdre.

La face BSC coupe le cylindre donné selon une circonférence de centre S, de rayon égal à 55^{mm}; on sait construire les ellipses projections de cette circonférence, après avoir rabattu son plan BSC autour de sa trace horizontale bc; on prend ss'' égale à s_0s'; kS$_1$ égale à ks''. Les rabattements S$_1b$ et S$_1c$ des arêtes coupent en F$_1$ et en G$_1$ la circonférence de centre S$_1$, de rayon égal à 55^{mm}; d'où l'on a les extrémités f, f' et g, g' des arcs utiles des ellipses projections de la circonférence. L'extrémité utile du petit axe de l'ellipse projection horizontale est h; $s''h''$ égale 55^{mm}. L'extrémité utile du grand axe de l'ellipse projection verticale est i' sur $s'd'$.

Les faces ASB et ASC coupent le cylindre selon des parallèles fm, $f'm'$; gn, $g'n'$ à sa, $s'a'$.

La face ABC coupe le cylindre selon une ellipse dont le demi-grand axe ap est déterminé en menant la parallèle $h''p$ à $a's''$.

Le contour apparent vertical utile du cylindre est la parallèle $i'j'$ à $s'a'$.

On distingue aisément les parties vues et les parties cachées du corps qu'il faut représenter.

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES (1885)

Concours pour l'obtention des bourses de l'État.

I. Trouver la fraction ordinaire équivalente à la somme des fractions

$$\frac{1}{20\times 21}+\frac{1}{21\times 22}+\dots+\frac{1}{98\times 99}+\frac{1}{99\times 100}.$$

II. Une personne possède 110,000 francs placés, partie à un taux, partie à un autre taux. Si la première somme était placée au taux de la deuxième et la deuxième au taux de la première, elles rapporteraient des intérêts respectivement égaux à 3,600 francs et 2,500 francs. Trouver les deux sommes et les deux taux.

III. Résoudre les systèmes $x+y+\sqrt{xy}=a, \quad x^2+y^2+xy=b.$

(15 octobre, durée 1 h. 1/2.)

Concours pour l'obtention des bourses de la Ville de Paris.

I. Trois ouvriers A, B, C ont à faire un ouvrage; A et B travaillant ensemble pendant 4 jours feraient les 2/3 de l'ouvrage, B et C travaillant ensemble pendant 8 jours en feraient les 14/15, A et C travaillant ensemble pendant 5 jours en feraient les 3/4. On occupe A seul pendant 2 jours, B seul pendant 6 jours. Combien de jours C travaillant seul mettra-t-il à terminer l'ouvrage?

II. Résoudre le système $-3x+8y^2+6z^3=0, \quad -x-2y^2+12z^3=-4, \quad -2x+6y^2-3z^3=-5.$

III. Un négociant a acheté un certain nombre de mètres d'étoffe pour 600 francs. Si, pour la même somme, il avait obtenu 3m de plus, le mètre couterait 10 francs de moins. Combien avait-il acheté de mètres?

(28 octobre, durée 1 h. 1/2.)

QUESTION 170

Solution par M. Paul Cornud, à Thiers.

Démontrer la proposition suivante :

Dans un triangle rectangle :

1° Les droites antiparallèles qui joignent les projections des pieds de la médiane antiparallèle et de la médiane, sur les côtés adjacents, sont respectivement égales à ces droites ;

2° La droite qui joint les projections du pied de la médiane antiparallèle sur les côtés adjacents est antiparallèle à l'hypoténuse ;

3° La médiane et la médiane antiparallèle d'un triangle rectangle sont la médiane antiparallèle et la médiane du triangle de même sommet déterminé par la droite qui joint les projections sur les côtés adjacents du pied de la médiane antiparallèle du premier triangle ;

4° La droite qui joint les projections du pied de la médiane antiparallèle sur les côtés adjacents est égale à la somme des perpendiculaires abaissées de ses extrémités sur l'hypoténuse.

Déduire de là, la solution de la question suivante (Journal de mathématiques élémentaires, question 154): Etant donné un triangle rectangle ABC, *mener une droite antiparallèle à l'hypoténuse* BC, *de manière que la partie* DE, *comprise entre les côtés de l'angle droit, soit égale à la somme des perpendiculaires abaissées des points* D *et* E *sur l'hypoténuse.*

N. B. — *Dans cet énoncé, la médiane et la médiane antiparallèle considérées sont issues du sommet de l'angle droit.*

Soit ABC le triangle rectangle, AM la médiane et AN la médiane anti-parallèle.

1° En menant les perpendiculaires MP, MQ pour obtenir les projections P et Q du pied M de la médiane. nous avons formé un rectangle MPAQ dans lequel les deux diagonales PQ, AM sont égales.

C. Q. F. D.

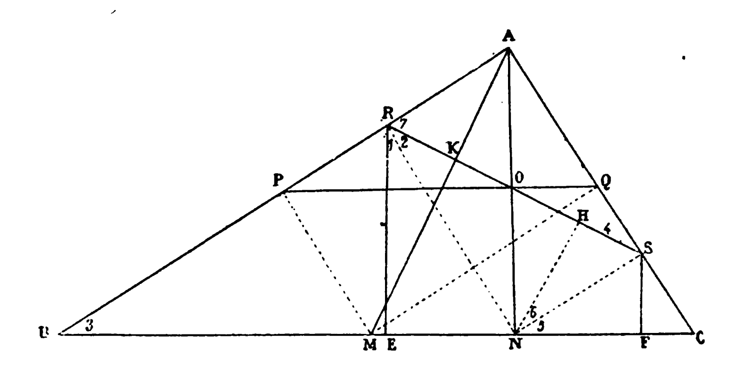
De même dans le rectangle NRAS, les deux diagonales RS, AN sont égales.

C. Q. F. D

2° Puisque la médiane antiparallèle est la droite qui joint le milieu de toutes les antiparallèles au côté d'un triangle, toute droite, qui, terminée aux deux autres côtés du triangle est partagée par la médiane antiparallèle en deux parties égales, sera antiparallèle au troisième côté. Donc RS qui est partagée en O en deux parties égales par AN est antiparallèle à l'hypoténuse BC.

C. Q. F. D.

3° Il faut démontrer que AO est la médiane et AK la médiane antiparallèle du triangle ARS. Nous venons de voir



que RO = OS. Donc AO est bien la médiane du triangle ARS.

C. Q. F. D.

AM partageant BC en deux parties égales, partagera aussi toutes les parallèles à BC en deux parties égales. Donc, si, dans le triangle ARS, on mène des parallèles à l'hypoténuse, ces droites seront partagées en deux parties égales par AK. Or l'hypoténuse étant antiparallèle à RS, ses parallèles menées dans le triangle RAS seront aussi antiparallèles à RS. Donc AK est la médiane antiparallèle du triangle RAS.

4° Il faut démontrer que RS = RE + SF. Pour le démontrer, menons du point N une perpendiculaire à RS. Les deux triangles rectangles REN, NRH, ont : l'hypoténuse commune, l'angle 1 = angle 3 comme ayant les côtés perpendiculaires, et les angles 2 et 4 sont égaux comme alternes internes. Or angle 4 = l'angle 3, donc angle 2 = 4. Les angles 1 et 2 sont donc égaux, de même que les triangles RNE, RNH et et l'on a RE = RH.

De même, les deux triangles rectangles NHS, NSF ont : l'hypoténuse commune, l'angle 5 = l'angle 3 comme correspondants, l'angle 6 = l'angle 4 comme ayant les côtés perpendiculaires. Or angle 4 = angle 3, donc angle 5

= angle 6, les triangles NHS, NSF sont aussi égaux et HS = SF.

Donc

$$RE + SF = RH + HS = RS.$$

C. Q. F. D.

Ainsi, pour mener une droite antiparallèle à l'hypoténuse d'un triangle rectangle, de manière que la partie RS comprise entre les deux côtés de l'angle droit soit égale à la somme des perpendiculaires abaissées de ses extrémités R, S, sur l'hypoténuse BC, il suffira de projeter le pied de la hauteur sur les côtés de l'angle droit.

NOTA. — Solutions analogues par MM. Anatole Chapelier, élève au lycée de Nancy; Bourdier, au lycée de Grenoble; Perreau, au lycée Henri IV; Guyenet, au lycée de Brest; Chapron, à Bragelogne; Georges Nesty, à La Guadeloupe; Henri Martin, au lycée Condorcet; L. Philippon, au collège de Thiers; G. Potier, élève au lycée Henri IV (classe de M. Colas); Maurice Froger des Chesnes, école de Pontlevoy (classe de M. Pellé); Fitz-Patrick, élève au lycée de Poitiers.

QUESTION 172

Solution et généralisation par M. A. FITZ-PATRICK, élève de mathématiques élémentaires au Lycée de Poitiers.

On considère un cercle Δ *et un diamètre* AB *de ce cercle. Soit* M *un point pris sur* Δ, *de* M *on abaisse une perpendiculaire* MR *sur* AB.

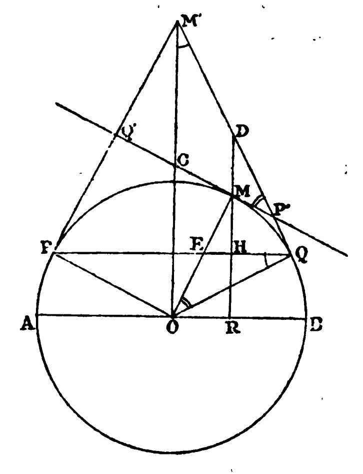
Cela posé, soit H *un point de* MR *tel que* $\frac{RH}{RM} = \frac{1}{n}$; *par* H *on mène une parallèle à* AB *qui rencontre* Δ *aux points* P *et* Q. *Les tangentes à* Δ *aux points* M, P, Q *déterminent un triangle* M'P'Q' *(*M' *désignant le sommet qui correspond à la tangente en* M, *et ainsi des autres).*

Démontrer que l'on a

$$M'P' + M'Q' = n.P'Q'.$$

Menons les droites OQ, OM, OM' et remarquons que les

deux triangles M'P'C et OQE sont semblables comme équiangles; car $\widehat{OQE} = \widehat{PM'C'}$ comme ayant les côtés perpendiculaires et étant tous les deux aigus, de plus $\widehat{CMP''} = \widehat{MOQ}$ comme supplémentaires du même angle MP'Q.



On a donc

$$\frac{P'C}{P'M'} = \frac{OE}{OQ} = \frac{OE}{OM} = \frac{RH}{RM} = \frac{1}{n}.$$

Mais

$$\frac{P'C}{P'M'} = \frac{Q'C}{Q'M'} = \frac{P'Q'}{P'M' + Q'M'},$$

par suite

$$\frac{P'Q'}{P'M' + Q'M'} = \frac{1}{n},$$

d'où

$$P'M' + Q'M' = n.P'Q'.$$

En supposant $n = 2$, on a le cas particulier proposé.

Nota. — Nous avons aussi reçu de bonnes solutions de MM. Chapron; Bourdier, au lycée de Grenoble; Rogier; Couade (Gaston), élève de mathématiques spéciales au collège Chaptal; Prince, élève au lycée de Grenoble; Henri Martin, lycée Condorcet.

QUESTION 173

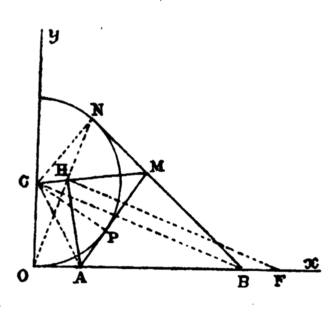
Solution par M. L. Prince, élève au Lycée de Grenoble.

On considère deux droites rectangulaires Ox *et* Oy *et sur* Ox *deux points fixes* A *et* B. *D'un point* C *mobile sur* Oy, *avec* CO *pour rayon, on décrit un cercle* Δ *et l'on mène à ce cercle, par les points* A *et* B, *deux tangentes qui se coupent en* M. *Démontrer que si l'on projette le point* A *sur* CM, *le lieu décrit par cette projection est un cercle passant par* O, *le centre de ce cercle est d'ailleurs situé au milieu de* AB. (G. L.)

Soient P et N les points de contact des tangentes AP, BN; menons CM, CN, CP, CA, CB et enfin ON qui coupe CM et H. On a

$$\widehat{ACM} = \frac{\widehat{OCP}}{2} + \frac{\widehat{PCN}}{2} = \frac{\widehat{OCN}}{2} = \widehat{OCB} = \widehat{BON}.$$

Le quadrilatère AOCH est donc inscriptible et AHC est droit, ainsi H est la projection de A sur CM. Élevons en H une perpendiculaire à ON, elle coupe Ox en F. Les triangles rectangles HOF, HCA sont semblales, car $\widehat{HCA} = \widehat{HOA}$, alors



$$OF = \frac{AC.OH}{HC}.$$

Mais HCA, OCB sont aussi semblables, on en tire

$$OB = \frac{AH.OC}{HC}.$$

Enfin dans le quadrilatère AOCH

$$AC \times OH = OC \times AH + OA \times HC$$

ou

$$\frac{AC \times OH}{HC} = \frac{OC \times AH}{HC} \quad \text{ou} \quad OF = OA + OB;$$

ce qui prouve que F est fixe. Comme OHF est droit, le lieu de H est le cercle décrit sur OF comme diamètre; son centre est au milieu de AB.

Nota. — Ont résolu cette question MM. G. Bourdier, au lycée de Grenoble; Chapron; Rogier; Couade; Réné de Vaulchier, élève à l'institution Sainte-Marie, à Besançon; Fitz-Patrick, élève au lycée de Poitiers.

Quelques-unes de ces solutions empruntent la propriété fondamentale des tangentes aux coniques; une démonstration plus élémentaire était évidemment préférable.

QUESTION 175

Solution par M. A. Chapellier, élève au Lycée de Nancy.

On considère un cercle Γ *de centre* O *et deux diamètres rectangulaires* Δ, Δ'*; soit* A *l'une des extrémités de* Δ. *Autour de* O *on fait tourner un rayon* OM *et l'on projette en* P, *sur* Δ, *l'extrémité* M *de ce rayon;* AP *rencontre* OM *en un point* I.

Démontrer que le lieu de I *est une parabole, ayant pour foyer le centre* O *et pour directrice la parallèle à* Δ' *menée par* A.

Il suffit de prouver que OI = IB.

Les triangles semblables AHI et AOP donnent

$$\frac{AH}{IH} = \frac{OA}{OP}.$$



De même, les triangles semblables OHI et OPM donnent

$$\frac{OI}{IH} = \frac{OM}{OP}.$$

On a donc

$$OI = AH = IB.$$

Nota. — Solutions analogues par MM. A. Bodez au lycée de Chaumont; Etienne Thevenet, à Thiers; J. Chapron : Rogier; Couade; Georges Caye, élève au lycée Charlemagne (classe de M. Richard); Pierre Chazeau, de Thiers; G. Bourdier, élève de mathématiques élémentaires au lycée de Grenoble; René de Vaulchier, élève à l'institution Sainte-Marie, à Besançon; Henri Martin, élève au lycée Condorcet; L. Prince, élève au lycée de Grenoble; Giovanni Russo, à Catanzaro; A. Couvert, au lycée Condorcet.

M. Chapron a généralisé la question proposée, par une voie très naturelle, en considérant deux diamètres quelconques et en effectuant, parallèlement à ces droites, des projections obliques. Le lieu est alors une hyperbole.

QUESTIONS PROPOSÉES

225. — 1° L'orthocentre, le point de Lemoine d'un triangle ABC et le point de Lemoine du triangle orthocentrique sont trois points en ligne droite.

2° Le point de Lemoine K, le centre O' du cercle d'Euler (cercle des neuf points) d'un triangle ABC et le centre Z' du cercle de Brocard du triangle A'B'C' formé en menant par les sommets de ABC, des parallèles aux côtés opposés sont trois points en ligne droite et l'on a :

$$KO' = O'Z'.$$

3° Le centre O du cercle circonscrit à un triangle ABC, le point de Lemoine K_1 du triangle $A_1B_1C_1$ obtenu en joignant les milieux des côtés de ABC et le centre Z' du cercle de Brocard du triangle A'B'C' formé en menant par les sommets de ABC des parallèles aux côtés opposés sont trois points en ligne droite et tels que :

$$OK_1 = K_1Z'.$$

(*Vigarié.*)

226. — On donne une circonférence de diamètre AB; deux points C et D sur la circonférence, de part et d'autre de AB. Du milieu E de CD on mène EF perpendiculaire sur AC et EG perpendiculaire sur AD.

Démontrer que

$$BC \times EF + BD \times EG = 2\overline{CD}^2.$$

(*Griess.*)

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 16618-6.

RÉSOLUTION DU SYSTÈME
DE DEUX INÉGALITÉS DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE

Par M. **E. Lauvernay**, professeur au Collège Rollin.

1. Définition. — *Etant donnés deux polynômes entiers en* x, *du second degré; déterminer entre quelles limites on doit faire varier* x *pour que l'on ait constamment ces deux polynômes ou de même signe ou de signes contraires, constitue la résolution d'un système de deux inégalités du second degré à une inconnue.*

Il est évident que, ce problème résolu, on saura satisfaire à un nombre quelconque d'inégalités du premier et du deuxième degré.

2. — Dans cette étude, il n'y a lieu de considérer que le cas où les racines des deux équations obtenues, en substituant le signe $=$ aux signes d'inégalité, sont toutes réelles; car, si l'une de ces équations avait ses racines imaginaires : ou l'inégalité correspondante serait contradictoire, et il y aurait impossibilité de satisfaire, en même temps, aux deux inégalités; ou cette inégalité serait identique, et le système se réduirait à une seule inégalité,

Soient donc les deux inégalités :

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0,$$
$$a'x^2 + b'x + c' \gtrless 0$$

α et β les valeurs de x annulant le premier trinôme; α' et β' celles annulant le second; nous supposerons dans tout ce qui suit

$$\alpha < \beta \quad \text{et} \quad \alpha' < \beta'.$$

Considérons d'abord le cas particulier où les coefficients des termes variables sont proportionnels, et supposons que nous ayons

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} = p.$$

Posons :

$$\frac{c}{a} = q, \qquad \frac{c'}{a'} = q';$$

en divisant par a la première inégalité et par a' la seconde, on a :

$$x^2 + px + q \neq 0,$$
$$x^2 + px + q' \neq 0,$$

Des deux quantités q, q', l'une q est supérieure à l'autre; posons donc

$$q = q' + K^2 \qquad (K \textit{ réel}).$$

Les trois systèmes à considérer sont les suivants :

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + px + q > 0 \\ x^2 + px + q' > 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} x^2 + px + q > 0 \\ x^2 + px + q' < 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} x^2 + px + q < 0 \\ x^2 + px + q' < 0; \end{array} \right.$$

car les inégalités simultanées

$$x^2 + px + q' + K^2 < 0,$$
$$x^2 + px + q' \qquad > 0,$$

sont évidemment incompatibles.

3. Résolution du premier système :

$$x^2 + px + q' + K^2 > 0,$$
$$x^2 + px + q' \qquad > 0.$$

La seconde inégalité étant remplie, la première l'est *à fortiori ;* donc il est nécessaire et suffisant de satisfaire à la seconde et la solution est :

$$\text{ou} \quad x < \alpha', \qquad \text{ou} \quad x > \beta'.$$

4. Résolution du second système :

$$x^2 + px + q' + K^2 > 0,$$
$$x^2 + px + q' \qquad < 0.$$

Puisque $\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = -p$ et que $\alpha\beta > \alpha'\beta'$, on a

$$\alpha' < \alpha < \beta < \beta'.$$

Nous appliquons ici, comme on le voit, le théorème sur le maximum du produit de deux facteurs dont la somme est constante; or, le second trinôme est négatif, lorsque x est compris entre α' et β'; d'ailleurs, d'après la première inégalité, x ne peut être compris entre α et β, donc x doit varier

$$\text{soit de } \alpha' \text{ à } \alpha, \quad \text{soit de } \beta \text{ à } \beta'.$$

5. Résolution du troisième système :

$$x^2 + px + q < 0,$$
$$x^2 + px + q - K^2 < 0.$$

De même que dans le premier cas, il est suffisant et nécessaire de satisfaire à la première inégalité, et pour cela x doit varier de α à β.

6. — Revenant au cas général, nous nous proposons d'abord de résoudre le problème suivant :

Problème. — *Reconnaître, sans résoudre les équations*

$$x^2 + px + q = 0,$$
$$x^2 + p'x + q' = 0,$$

quel est l'ordre de grandeur de leurs racines supposées réelles .

Considérons l'équation

$$x^2 + px + q = x^2 + p'x + q',$$

dont la racine

$$x_1 = \frac{q' - q}{p - p'},$$

représente l'unique valeur finie que l'on puisse attribuer à x, pour que les deux trinômes :

$$x^2 + px + q, \qquad x^2 + p'x + q'$$

soient égaux. Substituons cette valeur x_1 dans l'un de ces trinômes et appelons $\frac{X}{(p - p')^2}$ le résultat de cette substitution, nous aurons :

$$X = (q' - q)^2 + p(q' - q)(p - p') + q(p - p')^2,$$

ou

$$X = (\alpha'\beta' - \alpha\beta)^2 + (\alpha + \beta)(\alpha'\beta' - \alpha\beta)(\alpha + \beta - \alpha' - \beta')$$
$$+ \alpha\beta(\alpha + \beta - \alpha' - \beta')^2;$$

or, cette expression s'annule pour :

$$\alpha = \alpha', \quad \alpha = \beta' \quad \text{et} \quad \beta = \alpha', \quad \beta = \beta';$$

car, si $\alpha = \alpha'$, cela signifie que α, substitué à x, annule en même temps les deux trinômes, donc leur différence étant nulle, leur racine commune α n'est autre que $\frac{q' - q}{p - p'}$; on a donc $X = 0$.

Le polynôme X est donc divisible par le produit

$$(\alpha - \alpha')(\alpha - \beta')(\beta - \alpha')(\beta - \beta'),$$

et le quotient de X par ce produit étant indépendant de α, β, α', β', est égal à l'unité; il est d'ailleurs facile de le voir, en ordonnant X et le produit précédent par rapport à α' et en ne considérant que le coefficient de α'^2.

Corollaire. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations* $P = 0$, $P' = 0$ *aient une racine commune est*

$$(q' - q)^2 + p(q' - q)(p - p') + q(p - p')^2 = 0.$$

Supposons que α soit la plus petite des quatre racines α, β, α', β'; si le résultat de la substitution de x_1 dans l'un des trinômes est *positif*, on a donc

$$X > 0 \quad \text{ou} \quad (\alpha - \alpha')(\alpha - \beta')(\beta - \alpha')(\beta - \beta') < 0;$$

les deux premiers facteurs étant négatifs, l'ordre de grandeur des quatre racines est indiqué par l'un des deux tableaux suivants :

$$\alpha < \beta < \alpha' < \beta',$$
$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta;$$

ou l'un des deux suivants, si α' est la plus petite des quatre racines :

$$\alpha' < \beta' < \alpha < \beta,$$
$$\alpha' < \alpha < \beta < \beta'.$$

Cela posé, on peut, sans troubler la généralité de cette discussion, supposer $p > p'$; alors on distinguera trois cas, selon que l'on a

$$x_1 > -\frac{p'}{2},$$

ou

$$-\frac{p'}{2} > x_1 > -\frac{p}{2},$$

ou

$$-\frac{p}{2} > x_1.$$

Premier cas : $x_1 > -\dfrac{p'}{2}$. — Il en résulte que x_1 est supérieur aux quatre racines.

Faisons croître x de $-\infty$ à x_1, par conséquent dans cet intervalle, on a

$$x < \frac{q' - q}{p - p'},$$

ou

$$px + q < p'x + q',$$

donc

$$x^2 + px + q < x^2 + p'x + q'.$$

Ainsi x *croissant* de $-\infty$ à x_1, la valeur du premier trinôme est constamment supérieure à celle du second; or, x_1 est supérieur à la plus petite des quatre quantités α, β, α', β'. Donc, lorsque le premier trinôme, d'abord positif, s'annulera pour la première fois, le second n'aura pas encore changé de signe; c'est-à-dire que α est la plus petite des quatre racines.

D'autre part, si on fait *décroître* x à partir de x_1, le premier trinôme, qui est d'abord positif, puisque l'on a supposé $X > o$, ayant une valeur constamment inférieure à celle du second, s'annulera le premier; c'est-à-dire que x, en décroissant d'une manière continue, passe par la valeur β avant d'atteindre les autres; donc β est la plus grande des quatre racines, et leur ordre de grandeur est :

$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta < x_1.$$

Deuxième cas : $-\frac{p'}{2} > x_1 > -\frac{p}{2}$. — Il en résulte que x_1 est supérieur à α et β, et au contraire inférieur à α' et β', puisque $X > o$; donc l'ordre de grandeur est

$$\alpha < \beta < x_1 < \alpha < \beta'.$$

Troisième cas : $-\frac{p}{2} > x_1$. — Il en résulte que x_1 est inférieur aux quatre racines.

Faisons *décroître* x de $+\infty$ à x_1; par conséquent, dans cet intervalle, on a

$$x > \frac{q' - q}{p - p'},$$

d'où

$$x^2 + px + q > x^2 + p'x + q'.$$

Donc, la valeur du second trinôme, d'abord positive, est constamment inférieure à celle du premier; lorsque le second s'annulera pour la première fois, le premier sera encore

positif et n'aura pas changé de signe; ainsi β' est la plus grande des quatre racines.

D'autre part, si on fait *croître* x à partir de x_1, on voit de même que le second trinôme, d'abord positif, s'annulera le premier; donc α' est la plus petite des quatre racines et leur ordre de grandeur est:

$$x_1 < \alpha' < \alpha < \beta < \beta'.$$

Enfin, si, au contraire, le résultat de la substitution de x_1 dans l'un des trinômes est *négatif*, on a

$$(\alpha - \alpha')(\alpha - \beta')(\beta - \alpha')(\beta - \beta') < 0,$$

et l'ordre de grandeur des quatre racines est

$$\alpha < \alpha' < \beta < \beta',$$

ou

$$\alpha' < \alpha < \beta' < \beta.$$

Or, puisque $\alpha + \beta < \alpha' + \beta'$, d'après l'inégalité: $p > p'$, la première série d'inégalités est seule admissible.

(A suivre.)

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES CERCLES DE TÜCKER

Par M. **Émile Vigarié**, élève à l'École des Mines.

(*Suite*, voir p. 195.)

---

6. — *Les deux triangles* $A_cB_aC_b$, $A_bB_cC_a$ *sont égaux entre eux et semblables à* ABC.

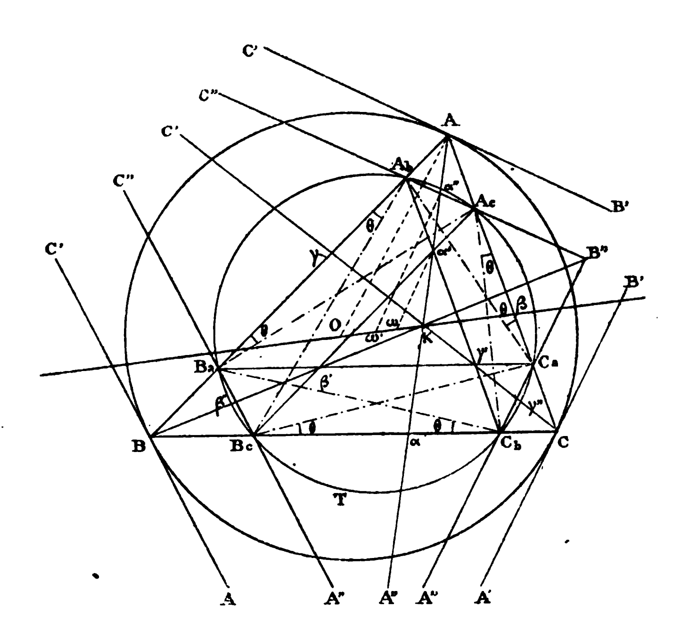
Ils ont les trois côtés égaux comme étant deux à deux les diagonales de trapèzes isocèles; donc :

$$B_aC_b = B_cC_a \qquad C_bA = C_aA_b \qquad A_cB_a = A_bB_c.$$

Ils sont semblables à ABC, car

$$\widehat{C_aA_bB_c} = \widehat{B_cA_cC_a} = A = \widehat{B_aA_cC_b}$$
$$\widehat{A_bB_cC_a} = \widehat{A_bB_aC_a} = B = \widehat{A_cB_aC_b}$$
$$\widehat{A_bC_aB_c} = \widehat{A_bC_bB_c} = C = \widehat{A_cC_bB_a}.$$

7. — Considérons maintenant un triangle ABC et un second triangle $A_cB_aC_b$ inscrit dans le premier, et qui lui soit semblable. La circonférence circonscrite au triangle $A_cB_aC_b$ coupera les côtés de ABC en trois autres points qui détermineront le triangle $A_bB_cC_a$; nous nous trouvons donc maintenant dans l'hypothèse formulée dans la note sur les *Théorèmes sur les intersections d'un cercle et d'un triangle*, que nous avons publiée dans ce journal *(Journal de Math. Élém. 1886*, pp. 106-109, 151-153); nous allons, par suite, pouvoir en tirer des conséquences résultant des formules générales que nous avons don-



nées. En nous reportant à cette étude, nous voyons immédiatement que :

1° Les angles de $A_cB_aB_b$ étant A, B, C, le triangle $A_cB_aC_b$ lui est semblable [§ 1 formule (1)] (*);

(*) Les renvois se rapportent à notre note précitée : *Théorèmes sur les intersections d'un cercle et d'un triangle d'après M. H. Taylor*

2° Les droites A_cB_c, B_aC_a, A_bC_b se coupent en trois points situés sur les symédianes du triangle ABC (§ 3);

3° L'équation du lieu du centre du triangle (§ 5, formule 5) devient ici :

$$\frac{x}{a}\sin(B-C)+\frac{y}{b}\sin(C-A)+\frac{z}{c}\sin(A-B)=o,$$

et l'on voit immédiatement que cette équation est vérifiée par les coordonnées du centre du cercle circonscrit ABC et par celles du point de Lemoine.

4° L'enveloppe des cercles de Tucker est une ellipse touchant les côtés de ABC aux pieds des symédianes. Les foyers de cette ellipse sont les points de Brocard.

8. — Nous avons vu (paragraphe 4) que les droites A_aB_b, B_aB_c, C_aC_b sont égales et que (paragraphe 5) les six points A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b sont sur un même cercle. Ces résultats ont été énoncés différemment par M. Neuberg (*Mathésis*, 1881); on peut dire :

Les extrémités de trois droites égales, menées entre les angles d'un triangle ABC, *parallèlement aux côtés du triangle orthocentrique, sont situées sur un même cercle de Tucker,*

ou bien encore :

Si les sommets d'un triangle se trouvent sur les symédianes d'un autre triangle ABC *et que ses côtés soient parallèles aux côtés du triangle orthocentrique de* ABC, *les côtés de ces triangles se coupent mutuellement en six points d'un même cercle de Tucker.*

9. — Soient α', β', γ' les points où se coupent les droites A_cB_c, A_bC_b, B_aC_a.

Le centre d'un cercle de Tucker est au milieu de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit à ABC *et le centre du cercle circonscrit au triangle* $\alpha'\beta'\gamma'$.

La perpendiculaire élevée en A à B'C' passe par O; le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ ayant ses côtés parallèles à ABC, la droite menée par α parallèlement à AO passera par le centre ω du cercle cir-

conscrit à $\alpha'\beta'\gamma'$. Le centre du cercle de Tucker est sur la perpendiculaire $\alpha''\omega'$ qui est parallèle à AO. Les trois points O, ω', ω sont sur une même droite. Comme la figure $AA_b\alpha'A_c$ est un parallélogramme et que $A\alpha'$ passe par α'' milieu de A_bA_c, il en résulte que ω' est le milieu de $O\omega$.

10. — *Les trois points* X, Y, Z, *sont en ligne droite.*

En effet les deux triangles ABC, A″B″C″, étant homologiques, les points d'intersection des côtés homologues sont trois points en ligne droite.

11. — *Le cercle* T *et la circonférence circonscrite à* ABC *ont la droite* XYZ *pour axe radical.*

En effet, car dans les triangles semblables ZAC_a, ZC_bB on a

$$\frac{ZA}{ZC_b} = \frac{ZC_a}{ZB},$$

ou

$$ZA.ZB = ZC_a.ZC_b.$$

12. — *Les cercles* CBA_cA_b, BAC_aC_b, ACB_cB_a *ont pour centre radical le point de Lemoine.*

Le triangle $A_cB''C_a$ étant isoscèle, on a $B''A_c = B''C_a$; or comme $A_bA_c = C_aC_b$ on a :

$$B''A_c \times A_bA_c = B''C_a \times C_aC_b.$$

Le point B″ situé sur la médiane antiparallèle ou symédiane $B\beta$ est un point de l'axe radical des deux circonférences BA_bA_cC, AC_aC_bB; comme ces circonférences passent par le point B, la symédiane $B\beta$ est l'axe radical. On prouverait de même que les circonférences prises deux à deux ont pour axe radical une symédiane; elles ont donc pour centre radical le point de Lemoine.

De là résulte ce théorème :

Si deux cercles passant par A, B *et* A, C *se coupent en un point de la symédiane* AK, *les angles* ACB, ABC *interceptent des cordes égales.*

13. — Les côtés des deux triangles $A_cB_aC_b$, $A_bB_cC_a$ font avec les côtés homologues de ABC le même angle θ, car on a :

$$\widehat{C_aB_cC_b} = \widehat{A_bC_aA_c} = \widehat{B_cA_bB_a} = \theta,$$
$$\widehat{B_aC_bB_c} = \widehat{A_cB_aA_b} = \widehat{C_bA_cC_a} = \theta\,;$$

on peut donc dire que :

Si dans un triangle ABC *on inscrit deux triangles* $A_cB_aC_b$, $A_bB_cC_a$, *semblables à* ABC, *tels que les côtés font avec leurs homologues de* ABC *le même angle* θ, *les sommets des deux triangles inscrits appartiennent à un cercle de Tucker.*

14. — AB_aA_c, BB_aC_b, CC_bA_c se coupent en un point Ω tel que les angles $\widehat{B_a\Omega C_b} = \widehat{A\Omega B} = \pi - B$; $\widehat{C_b\Omega A_c} = B\Omega C = \pi - C$. Donc :

Les triangles ABC, $C_bA_cB_a$ *ont même premier point de Brocard* Ω.

De même :

Les deux triangles ABC, $A_bB_cC_a$ *ont même deuxième point de Brocard* Ω'.

15. — Si Ω, Ω' sont les points de Brocard du triangle ABC et si nous appelons, avec M. Neuberg, *faisceaux de Brocard* les groupes de droites (ΩA, ΩB, ΩC), ($\Omega' A$, $\Omega' B$, $\Omega' C$), on peut énoncer ainsi un autre mode de génération des cercles de Tucker :

Si l'on fait tourner les deux faisceaux de Brocard autour de leurs centres d'un même angle θ *et en sens contraire, les rayons rencontrent les côtés correspondants de* ABC *en six points d'un cercle de Tucker.*

Les points de Brocard sont donc les deux *centres permanents de similitude.*

Les propriétés générales des *cercles de Tucker* que nous venons de donner, et dont la plupart ont été énoncées par les auteurs dont nous avons cité les mémoires au commence-

ment de cette note, et particulièrement par M. E. Lemoine (*Mathésis* 1884), donnent comme cas particuliers remarquables : le premier cercle de Lemoine, les cercles de Taylor, Neuberg, M'Cay, etc. Ils feront l'objet d'un prochain article.

SUR QUELQUES ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES REMARQUABLES

Par M. A. Boutin, professeur au Collège de Vire.

1. — *Résoudre l'équation*

$$C = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos (2^n - 1)x = 0. \quad (1)$$

Groupons les termes à égale distance des extrêmes et transformons leur somme en produit; il vient :

$$\cos x + \cos (2^n - 1)x = 2 \cos 2^{n-1}x \cos (2^{n-1} - 1)x$$
$$\cos 3x + \cos (2^n - 3)x = 2 \cos 2^{n-1}x \cos (2^{n-1} - 3)x$$
$$\cos 5x + \cos (2^n - 5)x = 2 \cos 2^{n-1}x \cos (2^{n-1} - 5)x$$

. . . .

La dernière des égalités comprend les deux termes du milieu; le nombre des termes du premier membre de (1) est 2^{n-1}; il est donc toujours pair, sauf pour $n = 1$; ces deux termes du milieu ont les rangs

$$2^{n-2}, \quad 2^{n-2} + 1,$$

et leur expression est : $\cos (2^{n-1} - 1)x$, pour le premier; et $\cos (2^{n-1} + 1)x$, ou $\cos (2^n - 2^{n-1} + 1)x$, pour l'autre.

Donc

$$\cos (2^{n-1} - 1)x + \cos (2^n - 2^{n-1} + 1)x = 2 \cos 2^{n-1}x \cos x,$$

Ajoutons membre à membre toutes les égalités précédentes, nous avons

$$C = 2 \cos 2^{n-1}x[\cos (2^{n-1} - 1)x + \cos (2^{n-1} - 3)x + \ldots + \cos 3x + \cos x] = 0.$$

La quantité entre crochets est de la même forme que le premier membre de l'équation proposée; il suffit pour l'obtenir d'y remplacer n par $n - 1$; on pourra donc, par le même

moyen, faire apparaître le facteur $2 \cos 2^{n-2}x$; puis, dans la nouvelle parenthèse, un facteur analogue; et ainsi de suite. On arrive ainsi à la formule que nous avions en vue :

$$C = 2^{n-1} \cos x . \cos 2x . \cos 4x . \cos 8x \ldots \cos 2^{n-1}x.$$

Les racines de l'équation $C = 0$ sont celles des équations :

$$\cos x = 0, \quad \cos 2x = 0, \quad \cos 4x = 0, \ldots \quad \cos 2^{n-1}x = 0.$$

Toutes ces équations rentrent dans la dernière, si on suppose que n puisse recevoir toutes les valeurs entières de 1 à n.

On a donc, finalement,

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{2^p},$$

k étant un entier quelconque positif, négatif ou nul; et p ne pouvant recevoir que les valeurs entières de 1 à n.

2. — *Résoudre l'équation*

$$C' = 1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \ldots$$
$$+ \cos(2^{n+1} - 2)x = 0.$$

Groupons, comme précédemment, les termes équidistants des extrêmes; il vient :

$$1 + \cos (2^{n+1} - 2)x = 2 \cos^2 (2^n - 1)x$$
$$\cos 2x + \cos (2^{n+1} - 4)x = 2 \cos (2^n - 1)x \cos (2^n - 3)x$$
$$\cos 4x + \cos (2^{n+1} - 6)x = 2 \cos (2^n - 1)x \cos (2^n - 5)x.$$

. . . .

$$\cos 2^n x + \cos (2^{n+1} - 2^n - 2)x = 2 \cos (2^n - 1)x \cos x.$$

Ajoutons membre à membre toutes ces égalités et mettons en facteur $2 \cos (2^n - 1)x$, dans le second membre ; il vient

$$C' = 2 \cos (2^n - 1)x[\cos (2^n - 1)x + \cos (2^n - 3)x$$
$$+ \ldots + \cos x].$$

La quantité entre crochets est le premier membre C de l'équation traitée précédemment; on a donc immédiatement

$$C' = 2^n \cos (2^n - 1)x . \cos 2^{n-1}x . \cos 2^{n-2}x \ldots \cos 2x \cos x.$$

L'équation $C' = 0$ admet donc pour racines, outre les racines de $C = 0$, celles de l'équation

$$\cos (2^n - 1)\, x = 0,$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{2(2^n - 1)}.$$

3. — *Résoudre l'équation*

$$S = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x + \ldots + \sin (2^n - 1)x = 0.$$

Groupons encore les termes à égale distance des extrêmes :

$$\sin x + \sin (2^n - 1)x = 2 \sin 2^{n-1}x \cos (2^{n-1} - 1)x$$
$$\sin 3x + \sin (2^n - 3)x = 2 \sin 2^{n-1}x \cos (2^{n-1} - 3)x$$
$$\sin 5x + \sin (2^n - 5)x = 2 \sin 2^{n-1}x \cos (2^{n-1} - 5)x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sin (2^{n-1} - 1)x + \sin (2^n - 2^{n-1} + 1)x = 2 \sin 2^{n-1}x \cos x.$$

Ajoutons membre à membre ces égalités et mettons $2 \sin 2^{n-1}x$ en facteur, il vient

$$S = 2 \sin 2^{n-1}x[\cos (2^{n-1} - 1)x + \cos (2^{n-1} = 3)x + \ldots + \cos x].$$

La quantité entre parenthèses est C, où n a été remplacé par $n - 1$. On a donc

$$S = 2^{n-1} \cos x. \cos 2x. \cos 4x \ldots \cos 2^{n-2}x. \sin 2^{n-1}x.$$

Ainsi les racines de $S = 0$ sont

$$x = \frac{(2k + 1)\pi}{2^p}, \quad \text{et} \quad x = \frac{k\pi}{2^{n-1}};$$

k pouvant recevoir toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, et p les valeurs positives, entières, de 1 à $n - 1$.

GÉNÉRALITÉS SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

LES POINTS RÉCIPROQUES ET LES POTENTIELS D'ORDRE p

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 198.)

---

22. Points Brocardiens. — Si l'on considère un point M,

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}, \qquad (1)$$

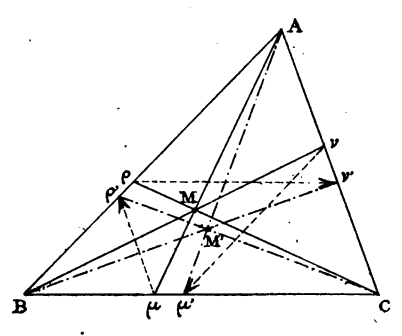
parmi les points que l'on peut associer à celui-ci on doit encore signaler deux points M', M'' dont les coordonnées vérifient les égalités

$$B\alpha' = C\beta' = A\gamma', \qquad (M')$$
$$C\alpha'' = A\beta'' = B\gamma'', \qquad (M'')$$

et qui constituent avec le point M ce que M. Neuberg nomme, familièrement, un triumvirat. Ces points M′ et M″, ainsi associés à M, se déduisent de celui-ci, comme le couple de Brocard du point de Lemoine; on peut les appeler *points Brocardiens* correspondant au point donné (*).

La construction de ces points se fait très simplement de la manière suivante (**).

Les droites AM, BM, CM rencontrent les côtés du triangle en des points μ, ν, ρ; menons :



$\mu\rho'$ parallèle à CA,

$\nu\mu'$ — AB,

$\rho\nu'$ — BC,

les droites $A\mu'$, $B\nu'$, $C\rho'$ concourent en un point qui est l'un des points Brocardiens correspondant au point M.

On voit d'abord que les droites en question concourent; il suffit d'appliquer aux points μ, ν, ρ ; μ', ν', ρ' le théorème de Jean de Céva, et la propriété réciproque.

En outre, on a

$$\frac{B\rho'}{A\rho'} = \frac{B\mu}{C\mu}, \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{C}{B};$$

et

$$\frac{A\nu'}{C\nu'} = \frac{A\rho}{B\rho}, \quad \text{ou} \quad \frac{\gamma'}{\alpha'} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{B}{A}.$$

Ces égalités donnent bien

$$B\alpha' = C\beta' = A\gamma'.$$

(*) Cette généralisation de l'idée qui fait apparaître les points de Brocard dans l'étude de la géométrie du triangle paraît due à M. Lemoine, qui l'a fait connaître dans un très intéressant mémoire communiqué au congrès de l'Association française, à Grenoble. (V. *Annuaire* 1885.) Ce mémoire se trouve aussi dans le *Supplément du numéro de mai* 1886 *de Mathésis*.

(**) Cette construction a été donnée par M. Lemoine, *Nouvelles Annales*, 1885, p. 202.

Pour obtenir le second point Brocardien, il faut effectuer le tracé indiqué, mais dans l'ordre inverse; mener $\mu\rho''$ parallèle à BA, etc.

23. Points isobariques. — A un point donné M (A, B, C) on peut aussi associer des points que nous désignerons par M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 conformément aux tableaux suivants :

M ...	A,	B,	C	M_3...	A,	C,	B
M_1...	B,	C,	A	M_4...	C,	B,	A
M_2...	C,	A,	B	M_5 ..	B,	A,	C

On obtient ainsi un groupe de six points que, pour une raison que nous allons donner, nous appellerons, avec M. Neuberg, *groupe isobarique* associé à un point donné.

La raison de cette dénomination découle de ce fait que *les deux triangles* MM_1M_2, $M_3M_4M_5$ *ont le même centre de gravité que le triangle de référence.*

Dans le premier groupe que nous qualifierons *groupe de première espèce,* pour le distinguer du second, le point milieu (*) de M_1M_2 est représenté par les coordonnées

$$B + C,\quad C + A,\quad A + B;$$

or, ces quantités sont, précisément, les coordonnées du point complémentaire de M.

Cette démonstration si simple s'applique, de même, au groupe isobarique de seconde espèce $M_3M_4M_5$.

La construction des points isobariques, associés à un point donné, n'offre aucune difficulté.

Pour les points de première espèce, il suffit d'observer qu'ils sont les réciproques des points Brocardiens.

Pour ceux de seconde espèce la construction est encore beaucoup plus simple.

Prenons, par exemple, le point M_5 et comparons-le au

(*) Lorsque les coordonnées de deux points M, M' sont :

$$A, B, C;\quad A', B', C';$$

si l'on a

$$A + B + C = A' + B' + C'$$

les coordonnées du point milieu ω sont proportionnelles à

$$A + A',\quad B + B',\quad C + C'.$$

On démontre ceci, en deux mots, et très élémentairement, en cherchant *les coordonnées absolues* des points M, M' et ω.

point donné M. Nous observons alors : 1° que les deux points M et M_3 formant, avec la base BC du triangle de référence, deux triangles de même aire, la droite MM_3 est parallèle à BC ; 2° que les droites AM et AM_3 rencontrent BC en deux points isotomiques. De cette double remarque on déduit la détermination de M_3, connaissant M, par un tracé tout à fait simple.

24. Construction de l'associé à l'infini. — Cette construction, que nous avions réservée, peut se faire très simplement par la considération des points isobariques.

Soit M un point, et soient A, B, C ses coordonnées; les points isobariques de première espèce correspondants M_1, M_2 sont représentés par

$$B, \quad C, \quad A; \qquad C, \quad A, \quad B;$$

la droite M_1M_2 a donc pour équation

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ B & C & A \\ C & A & B \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\Sigma\, \alpha(BC - A^2) = 0.$$

Cette droite passe visiblement par le point M_∞

$$B - C, \qquad C - A, \qquad A - B,$$

en vertu de l'identité

$$\Sigma\, (B - C)(BC - A^2) \equiv 0.$$

Par exemple : au centre I du cercle inscrit (a, b, c) correspondent deux points isobariques de première espèce I_1 (b, c, a), I_2 (c, a, b) qui ont été étudiés par M. Jérabek (*Mathesis*, t. Ier; p. 192); la droite I_1I_2 donne la direction du point situé à l'infini, associé de I, et dont les coordonnées sont

$$b - c, \qquad c - a, \qquad a - b.$$

La droite I_1I_2 a pour équation

$$\Sigma\, \alpha(bc - a^2) = 0,$$

et le point, harmoniquement associé à la transversale réciproque de cette droite, a pour coordonnées

$$bc - a^2, \qquad ac - b^2, \qquad ab - c^2.$$

Ce point a été déjà signalé; les considérations qui précèdent donnent un moyen assez rapide pour trouver sa position.

Observons encore qu'il résulte d'une remarque faite plus haut un autre moyen pour trouver le point qui est associé à l'infini avec le centre du cercle inscrit. Ce point est en effet harmoniquement associé avec la transversale réciproque de la droite qui joint le centre du cercle inscrit au centre de gravité.

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur aux Collège de Vire.

1. — Si dans un triangle ABC on considère les trois cercles qui ont leur centre sur un côté et sont tangents aux deux autres, la somme des inverses de leurs rayons est égale au double de l'inverse du rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC.

2. — Si l'on considère les cercles qui ont pour centres les pieds des bissectrices extérieures d'un triangle et qui sont tangents aux deux autres côtés prolongés, le diamètre de l'un d'eux est une moyenne harmonique entre les rayons des deux autres.

3. — Chacune des hauteurs d'un triangle ABC le partage en deux autres; on a ainsi six triangles. Si dans chacun d'eux on inscrit un cercle, et qu'on désigne dans un certain ordre leurs rayons par r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, le produit des rayons d'indice pair est égal au produit des rayons d'indice impair.

4. — Si on substitue aux hauteurs considérées dans l'exercice précédent les bissectrices intérieures, et que a', a'', b', b'', c', c'' soient les segments déterminés sur chaque côté par la bissectrice de l'angle opposé, $r_{a'}$, $r_{a''}$, $r_{b'}$ ... soient les rayons des six cercles considérés, on a la relation

$$\frac{a}{r_{b'}} + \frac{b}{r_{c'}} + \frac{c}{r_{a'}} = \frac{a}{r_{c''}} + \frac{b}{r_{a''}} + \frac{c}{r_{b''}}.$$

5. — Si, dans l'exercice précédent, on substitue aux bissectrices intérieures les bissectrices extérieures, et que l'on désigne par $r'_{a'}$, $r'_{a''}$, $r'_{b'}$ ... les six rayons des cercles considérés, on a, en employant les mêmes notations, la relation

$$\frac{1}{c-b}\left(\frac{c}{r'_{a'}}-\frac{b}{r'_{a''}}\right)+\frac{1}{a-c}\left(\frac{a}{r'_{b'}}-\frac{c}{r'_{b''}}\right)+\frac{1}{b-a}\left(\frac{b}{r'_{c}}-\frac{a}{r'_{c''}}\right)=\frac{1}{r}.$$

6. — Si, aux lignes considérées précédemment, on substitue les droites qui joignent le sommet d'un triangle au point de contact du cercle inscrit sur le côté opposé, et que l'on désigne par r_1, r_2, r_3 ... les six rayons des cercles analogues dans un certain ordre, on a la relation

$$\frac{1}{r_1r''}+\frac{1}{r_3r'''}+\frac{1}{r_5r'}=\frac{1}{r_2r'''}+\frac{1}{r_4r'}+\frac{1}{r_6r''}.$$

7. — Si aux lignes précédemment considérées on substitue les droites qui joignent le sommet d'un triangle au point de contact du cercle ex-inscrit sur le côté opposé, on a encore six cercles inscrits, soient r_1, r_2, r_3 ... leurs rayons, dans un certain ordre; le produit des rayons d'indice pair est égal au produit des rayons d'indice impair.

8. — Si on considère les cercles analogues, en remplaçant par les médianes les lignes considérées dans les exercices précédents, et que r_1, r_2, r_3 ... soient leurs rayons, la somme des inverses des rayons d'indice pair est égal à la somme des inverses des rayons d'indice impair (*).

9. — Si on joint le centre de gravité d'un triangle aux trois sommets, on le décompose en trois autres triangles; si R_a, R_b, R_c sont les rayons des cercles inscrits dans ces trois

(*) Ce résultat, que je croyais nouveau, figure dans le *Journal de Mathématiques* (année 1881, p. 64). Il n'est conservé ici que pour compléter la suite de ces propositions.

derniers triangles, on a la relation

$$\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_c}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_5}+\frac{1}{r_6}-\frac{3}{r}.$$

10. — Si dans un triangle ABC on considère simultanément les trois médianes, elles partagent ABC en six triangles; si r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 sont les rayons des cercles inscrits dans ces six triangles, et dans un certain ordre, la somme des inverses des rayons d'indice pair est égale à la somme des inverses des rayons d'indice impair.

11. — Si par le sommet A d'un triangle on mène une droite AD quelconque, arrêtée au côté a, elle partage le triangle ABC en deux triangles T_1 et T_2, additifs ou soustractifs, tels que le rapport $\frac{R_1}{R_2}$ des cercles circonscrits aux triangles T_1, T_2 est égal au rapport $\frac{c}{b}$ des côtés qui comprennent l'angle A.

On en déduit que si l'on mène par les sommets B et C d'autres droites, et que si l'on considère les rayons R_3, R_4, R_5, R_6 des cercles analogues à R_1 et R_2, le produit K des rayons d'indice pair est égal au produit des rayons d'indice impair.

Nota. — On trouvera

$$K = R_1R_3R_5 = \frac{AD.BE.CF}{8 \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}.$$

Voici la valeur de K pour quelques lignes remarquables du triangle

(Médianes) (*)

$$K = \frac{a^2b^2c^2mm'm''}{64\,S^3};$$

(Hauteurs)

$$K = \frac{abc}{8};$$

(*) La proposition rapportée par M. Gino-Loria (*Journal*, année 1881, p. 64) n'est qu'un cas particulier de ce théorème très général.

(Bissectrices intérieures)

$$K = \frac{abc}{8 \sin\left(B + \frac{A}{2}\right) \text{ins}\left(C + \frac{B}{2}\right) \sin\left(A + \frac{C}{2}\right)};$$

(Bissectrices extérieures)

$$K = \frac{d'_a\, d'_b\, d'_c}{8 \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}, \quad \text{etc.}$$

12. — Calculer les trois côtés d'un triangle rectangle, connaissant les rayons a et b des demi-cercles qui ont leur centre sur un côté de l'angle droit et sont tangents aux deux autres côtés.

13. — Si on considère les trois hyperboles qui ont pour foyers les deux sommets d'un triangle et passent par le troisième sommet :

1° L'un des axes focaux est égal à la somme des deux autres;

2° Le produit des demi-axes non-transverses est égal au produit de la surface du triangle par le rayon du cercle inscrit;

3° Si 2α, 2β, 2γ représentent les angles des asymptotes de ces trois hyperboles, on a la relation

$$\sin \beta \,.\, \sin B = \sin \alpha \,.\, \sin A + \sin \gamma \,.\, \sin C;$$

4° Les trois branches de courbe passant par les sommets se coupent en un même point. (Il en est de même d'une de ces branches et des deux secondes pour les deux autres hyperboles;

5° Deux des ellipses considérées dans la question proposée n° 201 (*Journal de Mathématiques*, décembre 1885) et l'hyperbole passant par le troisième sommet se coupent en un même point.

On peut exprimer les côtés, la surface et le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC au moyen des axes non-transversales $2a$, $2b$, $2c$ des trois hyperboles. Le carré de l'inverse du rayon du cercle inscrit est égal à la somme des carrés des inverses des demi-axes non-transverses.

14. — On considère un cercle O et deux diamètres AA', BB'

rectangulaires; on mène un rayon quelconque OC, puis CD parallèle à OA, D étant le point où CD coupe OB; on mène AD qui coupe OC en un point M dont on demande le lieu.

Ce lieu est une parabole qui a pour foyer le point O et pour directrice la tangente en A au cercle.

15. — On a entre les côtés a, b, c d'un triangle quelconque ABC et les distances d_1, d_2, d_3 du point de concours H des hauteurs aux sommets, la relation

$$\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}=\frac{abc}{d_1d_2d_3}.$$

16. — Couper un cône circulaire droit donné par un plan parallèle à une des génératrices et tel que le segment parabolique de section ait une aire maximum (*).

17. — On considère un cercle O et deux points fixes A et B à égale distance du centre sur le diamètre fixe A'B'; un troisième point mobile C parcourt la circonférence. On joint CA, CB; ces deux droites rencontrent respectivement en D et en E la circonférence; les tangentes en D et en E se coupent en un point M dont on demande le lieu.

Ce lieu est une ellipse qui a pour petit axe A'B'.

(A suivre.)

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

FACULTÉ DE LYON

29 juillet 1885. — I. Mesure de l'aire de la sphère.

II. Quel est le poids de glace à 0° nécessaire pour amener à l'état d'eau liquide à 5°, 95gr de vapeur d'eau saturante à 100° ? La chaleur de fusion de la glace est 80, la chaleur de condensation de la glace est 537.

(*) Cette question, qui figure dans le recueil d'exercices d'analyse infinitésimale de M. Frenet, peut se traiter élémentairement.

1er août. — Mesure du volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe situé dans son plan et passant par un seul sommet. Appliquer au cas d'un triangle équilatéral dont le côté = 1m tournant autour d'un axe incliné à 45° sur l'un des côtés.

CORRESPONDANCE

Remarque sur les puissances de 11.

MON CHER AMI,

La présente remarque est tellement simple que j'ai presque honte de vous l'adresser. Tout le monde a dû la faire, et cependant je ne l'ai vue imprimée nulle part. Elle aurait cependant, à mon avis, une véritable utilité si on l'introduisait dans l'enseignement d'une façon régulière.

Voici ce dont il s'agit. Les puissances successives de 11 sont : 11, 121, 1331, 14641, etc. On reconnaît immédiatement à l'inspection des chiffres de chacun de ces nombres les coefficients des puissances du binôme, et il n'en peut être autrement, puisque la règle de la multiplication par 11 est identique avec la formation ordinaire du triangle arithmétique de Pascal. D'ailleurs, 11 étant égal à $10 + 1$, 11^p sera $(10 + 1)^p$, c'est-à-dire que les chiffres seront les coefficients des termes dans le développement de $(x + 1)^p$. Pour le système décimal, la remarque ne s'applique que jusqu'à la 4e puissance ; car au delà les coefficients sont supérieurs à 10. Mais si l'on considère le nombre 11 comme écrit dans une base de numération aussi grande qu'on voudra, il n'y a plus de limitation, et les chiffres successifs seront, pour les diverses puissances,

(1), (1)
(1), (2), (1)
(1), (3), (3), (1)
(1), (4), (6), (4), (1)
(1), (5), (10), (10), (5), (1)
(1), (6), (15), (20), (15), (6), (1)
. . . .

(Je mets ici les nombres entre parenthèses pour exprimer qu'ils représentent, sans exception, des *chiffres* d'un certain système de numération.)

Par exemple, la 6e puissance de 38 dans le système de numération de base 37 s'écrira

(1)(6)(15)(20)(15)(6)(1).

Ne pensez-vous pas que cette remarque ramène au fond la formule du binôme aux plus simples notions de l'arithmétique élémentaire, c'est-à-dire à la théorie de la multiplication la plus facile et qu'à ce titre elle devrait prendre couramment place dans l'enseignement?

Si oui, donnez-lui accès dans l'un de vos deux excellents journaux.

Si non, excusez-moi de vous avoir pris vos instants pour une chose insignifiante.

Et dans tous les cas croyez-moi bien toujours votre tout dévoué.

C.-A. LAISANT.

Extrait d'une lettre de M. Ed. LUCAS.

M. Ed. Lucas nous écrit pour nous faire observer qu'on peut ajouter aux renseignements bibliographiques que M. Casimir Rey a donnés dans sa note sur l'omniformule, le suivant.

Un mémoire de Chelini publié dans le *Giornale Arcadico*, t. 96, a pour titre : *Teorema di Steiner, sul volume di un corpo-terminato da basi parallele circoscritto lateralimento da una superficie rigata*, par D. CHELINI, delle scuole Pie.

M. Ed. Lucas possède l'exemplaire de Chelini dédié à Steiner mais il ignore la date de sa publication; un de nos correspondants d'Italie, s'il possède le journal cité, nous la fera sans doute connaître.

G. L.

QUESTIONS PROPOSÉES

227. — Etant donnée une parabole de foyer F, on considère la perpendiculaire à l'axe passant au foyer et coupant la parabole en A et B : par ces points on mène des parallèles à l'axe $\Delta\Delta'$. Soit M un point de la parabole, on joint AM, BM qui coupent $\Delta\Delta'$ en K, H. Enfin HK coupe AB en I et l'on projette M en C sur AB. Démontrer :

1° Que le cercle ABM est coupé par CM en un point dont le lieu est une droite ;

2° AH + BK = const. ;

3° HK passe par un point fixe D ;

4° Le cercle DIC est tangent à l'axe en un point fixe ;

5° Les cercles qui ont leur centre sur HK et passent par HC, IC, sont orthogonaux ;

6° L'axe radical de ces cercles passe par un point fixe ;

7° Cet axe radical et les droites MF et HK concourent ;

8° HK est parallèle à la tangente en M ;

9° AH — BK = 2CF. *(Louis Prince,*
élève au lycée de Grenoble.)

228. — On donne, dans un plan, un angle xOy, et un point A. Par les points O, A, on fait passer une infinité de circonférences. Soit BC la corde déterminée, dans l'une d'elles, par les côtés de l'angle. Soit M la projection de A sur BC. Le lieu de M est la *droite de Simson* relative aux données (*). *(Catalan.)*

(*) Cette proposition, *évidente,* a seulement pour objet de généraliser la définition habituelle.

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 18666-6.

RÉSOLUTION DU SYSTÈME
DE DEUX INÉGALITÉS DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE

Par M. E. Lauvernay, professeur au Collège Rollin.

(*Suite*, voir p. 217.)

Soit
$$P = x^2 + px + q$$
$$P' = x^2 + p'x + q'.$$

Il y a quatre systèmes d'inégalités à considérer, selon que P et P' sont de même signe ou de signes contraires. Rappelons que, dans ce qui suit, on suppose que l'on a $p > p'$, ce qui est permis.

Premier Système : $P > 0$, $P' > 0$.

On substitue $\frac{q' - q}{p - p'}$ dans l'un des trinômes ; supposons d'abord que le résultat de cette substitution soit *positif*.

Si l'on a $\frac{q' - q}{p - p'} > -\frac{p'}{2}$, on a vu que l'ordre de grandeur des racines était donné par les inégalités
$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta.$$
x ne pouvant varier entre α et β d'après la condition $P > 0$, x ne peut varier que de $-\infty$ à α ou de β à $+\infty$, et dans ces conditions la seconde inégalité étant satisfaite, la solution du système est
$$x < \alpha \quad \text{ou} \quad x > \beta.$$

Si $\frac{q' - q}{p - p'}$ est compris entre $-\frac{p'}{2}$ et $-\frac{p}{2}$ l'ordre de grandeur étant :
$$\alpha < \beta < \alpha' < \beta'$$
on pourra faire varier x soit de $-\infty$ à α ; soit de β à α', soit de β' à $+\infty$.

Enfin, si l'on a $\frac{q' - q}{p - p'} < -\frac{p}{2}$, on a :
$$\alpha' < \alpha < \beta < \beta';$$

comme dans la première hypothèse, la solution est

$$x < \alpha' \quad \text{ou} \quad x > \beta'$$

Si, au contraire, le résultat de la substitution de x_1 est *négatif*, l'ordre de grandeur étant indiqué par les inégalités

$$\alpha < \alpha' < \beta < \beta',$$

la solution du système est

$$x < \alpha \quad \text{ou} \quad x > \beta'$$

DEUXIÈME SYSTÈME : $P > o$, $P' < o$.

La substitution de x_1, dans l'un des trinômes donnant un résultat *positif*, si l'on a

1° $x_1 > -\frac{p'}{2}$, l'ordre de grandeur est : $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$.

Or, pour satisfaire la seconde inégalité, x ne doit varier qu'entre α' et β', et dans cet intervalle, le premier trinôme serait constamment négatif et non positif, comme la question l'exige; donc, dans ce cas, il y a impossibilité de satisfaire à ce système; en d'autres termes, ces deux inégalités sont contradictoires.

2° Si l'on a $-\frac{p'}{2} > x_1 > -\frac{p}{2}$, l'ordre de grandeur des racines est :

$$\alpha < \beta < \alpha' < \beta',$$

donc en faisant varier x entre α' et β', les deux inégalités sont satisfaites, et il est évident que c'est la seule solution.

Enfin, si l'on a $x_1 < -\frac{p}{2}$, l'ordre de grandeur des quatre racines est : $\alpha' < \alpha < \beta < \beta'$,

x ne pouvant être compris entre α et β d'après l'inégalité $P > o$, on voit que x doit varier soitde α' à α, soit de β à β'.

Si, au contraire, le résultat de la substitution de x_1 dans l'un des trinômes est *négatif*, on a :

$$\alpha < \alpha' < \beta < \beta'.$$

D'après la condition $P' < o$, x ne peut varier que de α' à β', et puisque x ne peut être inférieur à β, l'intervalle compris de α' à β doit être supprimé, et la seule solution du système est

$$\beta < x < \beta'.$$

TROISIÈME SYSTÈME : $P < o$, $P' < o$.

En suivant le même ordre et faisant les mêmes raisonnements, on verra facilement que les solutions sont celles consignées dans le tableau ci-dessous. Cette observation s'applique au *quatrième Système :* $P < o$, $P' > o$.

		$P = x^2 + px + q > o$ $P' = x^2 + p'x + q' > o$	$P > o$ $P' < o$	$P < o$ $P' < o$	$P < o$ $P' > o$
$p = p'$ et $q > q'$		$x < \alpha'$ ou $x > \beta'$	$\alpha' < x < \alpha$ ou $\beta < x < \beta'$	$\alpha < x < \beta$	Imp.
$> p'$, $X > o$	$\frac{q'-q}{p-p'} > -\frac{p'}{2}$	$x < \alpha$ ou $x > \beta$	Imp.	$\alpha' < x < \beta'$	$\alpha < x < \alpha'$ ou $\beta' < x < \beta$
$> p'$, $X > o$	$-\frac{p'}{2} > \frac{q'-q}{p-p'} > -\frac{p}{2}$	$x < \alpha$ ou $x > \beta'$ ou $\beta < x < \alpha'$	$\alpha' < x < \beta'$	Imp.	$\alpha < x < \beta$
$> p'$, $X > o$	$-\frac{p}{2} > \frac{q'-q}{p-p'}$	$x < \alpha'$ ou $x > \beta'$	$\alpha' < x < \alpha$ ou $\beta < x < \beta'$	$\alpha < x < \beta$	Imp.
$> p'$, $X < o$		$x < \alpha$ ou $x > \beta'$	$\beta < x < \beta'$	$\alpha' < x < \beta$	$\alpha < x < \alpha$

(A suivre.)

GÉNÉRALITÉS SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

LES POINTS RÉCIPROQUES ET LES POTENTIELS D'ORDRE p

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 229.)

LES TRANSVERSALES DANS LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

Les idées générales que nous venons d'exposer peuvent s'appliquer, avec les modifications convenables aux transversales d'un triangle de référence, associées d'après cer-

taines lois géométriques. Le principe de dualité, pris dans son sens le plus général, trouve ici à s'employer de mille façons différentes ; mais ce que nous avançons exige peut-être quelques explications.

25. Correspondance générale de deux transversales. — Imaginons que nous sachions faire correspondre:

1° Un point M', à un point M ; 2° une droite μ, à un point M ; et réciproquement. Dans ces conditions, nous pouvons faire correspondre : à une droite donnée μ, un point M ; à celui-ci un point M' ; enfin, à ce dernier point une transversale μ'.

En jetant sur ces constructions une vue d'ensemble nous voyons donc que nous pourrons faire correspondre une droite μ' à une droite donnée μ toutes les fois que nous saurons établir une correspondance entre deux points ; et, aussi, entre un point et une droite. Cette correspondance des droites μ, μ', une fois établie, on pourra dégager le principe de transformation auquel on aboutit ainsi, des idées auxiliaires qui ont servi à le trouver ; et, finalement, chercher la loi de correspondance qui unit directement les transversales μ et μ'.

Nous allons mieux faire comprendre ces notions générales en les appliquant à deux exemples bien connus.

26. Transversales réciproques. — Prenons une droite Δ et soit M le point harmoniquement associé ; à ce point M, correspond son réciproque M_0 ; enfin à M_0 correspond une transversale Δ_0 harmoniquement associée. Ainsi, ces principes de correspondance entre les points réciproques d'une part, et les points et droites harmoniquement associés d'autre part, conduisent très naturellement à l'association des droites Δ et Δ_0.

Après avoir imaginé ces deux droites, déduites l'une de l'autre, comme nous venons de l'expliquer, on peut se proposer de dégager la correspondance trouvée des principes auxiliaires qui ont servi à l'établir et qui, au fond, constituent une évidente superfluité.

C'est ainsi que, dans cet exemple, observant que les droites

Δ, Δ_0 coupent les côtés en des points isotomiques, on voit que Δ et Δ_0 ne sont autre chose que deux transversales réciproques, lesquelles se déduisent directement l'une de l'autre par la loi connue.

27. Transversales inverses. — Prenons maintenant, au lieu de la correspondance par points réciproques, la correspondance par points inverses du colonel Mathieu.

A une droite Δ, faisons correspondre un point harmoniquement associé M; prenons ensuite le point inverse M′ et construisons enfin la droite Δ' harmoniquement associée à M′; nous obtenons ainsi deux transversales Δ, Δ' liées l'une à l'autre comme il vient d'être dit. Mais on peut établir directement la correspondance de Δ avec Δ' de la manière suivante.

Appelons, *droites isogonales* (*) deux droites qui, partant d'un sommet A d'un triangle, sont symétriques par rapport aux bissectrices de l'angle formé par les droites AB et AC. Si nous considérons une transversale Δ rencontrant les côtés de ABC aux points M_a, M_b, M_c les isogonales des droites AM_a, BM_b, CM_c coupent les côtés du triangle en trois points M'_a, M'_b, M'_c qui sont sur une droite Δ'.

Cette droite Δ', déduite de Δ par cette construction géométrique simple et directe est, comme on le vérifiera sans difficulté, celle que nous avons trouvée plus haut par un procédé indirect qui faisait intervenir dans la construction, tout à la fois, la notion des points inverses, et celle des points et droites harmoniquement associés. On obtient donc finalement entre les deux droites Δ, Δ' que nous nommerons *transversales inverses*, une correspondance directe et c'est celle-ci que l'on doit évidemment préférer.

28. Droite de Newton, associée d'une transversale donnée. — Dans d'autres cas, la correspondance entre deux transversales peut s'établir directement et, à l'inverse de ce que nous avons vu dans les deux paragraphes

(*) Nous proposons ici un changement de nomenclature analogue à celui que nous avons introduit pour le terme de *points isotomiques* (*J. M. S.*, 1886, p. 86).

précédents, on déduit de cette association une correspondance entre un point et une droite, ou entre deux points.

Voici un exemple de ce genre de correspondances.

Soit un triangle ABC ; une transversale Δ tracée dans son plan détermine un quadrilatère complet et l'on sait que les milieux des diagonales sont situés sur une certaine droite Δ'. Pour rappeler un théorème célèbre, on peut dire que Δ' est la droite de Newton, associée à Δ (*).

L'équation de Δ étant

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$

on vérifiera sans peine que Δ est représentée par

$$\frac{\beta + \gamma - \alpha}{A} + \frac{\alpha + \gamma - \beta}{B} + \frac{\alpha + \beta - \gamma}{C} = 0.$$

Il est facile de déduire de là la correspondance entre les points M, M' harmoniquement associés aux droites Δ et Δ'.

Les coordonnées (α, β, γ) de M sont

$$(1) \qquad \frac{1}{A}, \quad \frac{1}{B}, \quad \frac{1}{C};$$

celles de M' $(\alpha', \beta', \gamma')$ se calculent par les formules

$$(2) \quad \alpha'\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) = \beta'\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) = \gamma'\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right).$$

En comparant ces deux tableaux, on voit que *le réciproque de* M' *est l'anti-complémentaire de* M.

On obtient ainsi une propriété élémentaire assez curieuse sur le quadrilatère complet; mais la méthode de transformation des figures que prendrait pour base le principe de correspondance associant, comme nous venons de le voir, les points M et M', reviendrait au fond à la transformation par points réciproques. La raison en est que les figures anti-complémentaires étant homothétiques, du moins dans le système de coordonnées barycentriques que nous employons dans ce travail, les lieux décrits par les points M et M' sont, à une transformation homothétique près, deux courbes pou-

(*) Plus brièvement, Δ' pourrait s'appeler la *Newtonienne* de Δ. C'est aussi, suivant une locution assez répandue, la *médiane* du quadrilatère complet déterminé par le triangle de référence et par la transversale donnée Δ.

vant être considérées comme transformées l'une de l'autre par points réciproques.

29. Droites associées (sens général). — D'une façon générale, on voit que l'on peut reproduire, pour les droites, tout ce que nous avons dit relativement aux points qui sont, d'après une certaine loi, associés à un ou plusieurs points donnés; mais il nous reste à montrer comment on rattache la construction des droites associées à celle des points associés correspondants.

Prenons une droite Δ représentée par l'équation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$

et associons lui une droite Δ' ayant pour équation

$$\alpha f(A, B, C) + \beta f(B, C, A) + \gamma f(C, A, B) = 0\ ;$$

nous voulons faire observer que la détermination de Δ' se fera toujours sans difficulté, si l'on sait déterminer le point M dont les coordonnées sont

$$f(A, B, C), \qquad f(B, C, A), \qquad f(C, A, B),$$

connaissant d'ailleurs le point M′ qui correspond aux coordonnées

$$A, \quad B, \quad C.$$

En effet, M′ est le point harmoniquement associé à la transversale réciproque de Δ; on connaît donc ce point M′. Construisons maintenant le point M, associé au point M′ comme nous venons de le dire; en prenant la droite Δ' harmoniquement associée à M, puis sa transversale réciproque, nous obtiendrons Δ'.

30. Droites Brocardiennes. — De même qu'on ne peut concevoir un point M, sans imaginer aussitôt, entre autres choses, les points Brocardiens correspondants M′, M″; de même, une droite Δ du plan ABC donne naissance à deux droites Δ', Δ'', associées à la droite Δ, comme nous allons l'expliquer.

L'équation de Δ étant

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$

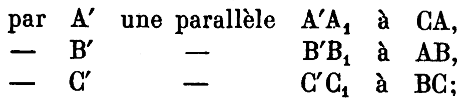
imaginons les droites Δ', Δ'' correspondant aux équations

$$\frac{\alpha}{B}+\frac{\beta}{C}+\frac{\gamma}{A}=o,$$

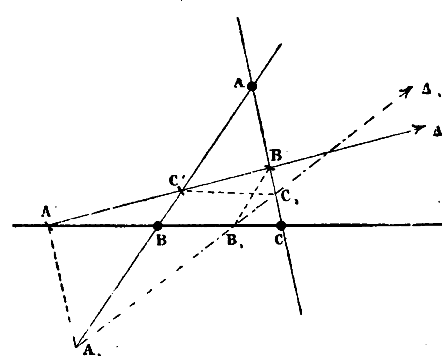
$$\frac{\alpha}{C}+\frac{\beta}{A}+\frac{\gamma}{B}=o,$$

et proposons-nous de les construire.

A cet effet, menons :



par	A′	une parallèle	$A'A_1$	à	CA,
—	B′	—	$B'B_1$	à	AB,
—	C′	—	$C'C_1$	à	BC;



les trois points A_1, B_1, C_1 sont, pour des raisons évidentes trois points en ligne droite ; cette droite est précisément l'une des droites visées ci-dessus.

La seconde droite s'obtient en effectuant le tracé précédent dans le sens inverse ; c'est-à-dire, en menant par A′ une parallèle à BA, etc.

31. Droites algébriquement adjointes. — En appliquant à la géométrie tangentielle l'idée des points algébriquement adjoints (*), on est naturellement conduit à considérer les quatre droites qui correspondent à l'équation

$$\pm\frac{\alpha}{A}\pm\frac{\beta}{B}\pm\frac{\gamma}{C}=o,$$

dans laquelle les signes sont arbitrairement choisis. Ces droites sont harmoniquement associées aux points ($\pm$ A, $\pm$ B, $\pm$ C) considérés par M. Lemoine; et, de l'une d'elles Δ, on

(*) J'ai proposé (§ 10), pour abréger le langage, de dire simplement *points adjoints;* mais cette expression ne vaut pas mieux que celle de *points associés* qui, pour ces points, a été proposée par M. Neuberg (*Mathesis*, t. I, p. 173) et par M. Lemoine (*J. M. S.* 1885, p. 193). Il faut, pour rappeler le plus possible le caractère de la loi d'association des points en question, ajouter qu'ils sont algébriquement adjoints ou algébriquemen associés ; car dire qu'ils sont adjoints ou associés, cela est insuffisant.

déduit les trois autres en prenant les conjugués harmoniques, par rapport aux côtés du triangle de référence, des points communs à Δ et à ces côtés. On obtient ainsi trois points, qui, joints deux à deux, donnent les droites algébriquement adjointes à Δ. Quatre droites adjointes forment un quadrilatère complet dont les diagonales sont justement les côtés du triangle de référence.

En un mot, ces deux idées corrélatives (je prends le terme dans son sens le plus général), l'une concernant les points M, N associés d'après une certaine loi correspondant au tableau:

A,	B,	C,	coordonnées de M;
$f(A,B,C)$,	$f(B,C,A)$,	$f(C,A,B)$,	— de N;

et l'autre les droites μ, ν associées l'une à l'autre de telle sorte que

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0, \qquad \text{soit l'équation de } \mu,$$

$$\alpha f(A,B,C), + \beta f(B,C,A) + \gamma f(C,A,B) = 0, \text{ celle de } \nu,$$

ces deux idées, disons-nous, sont tellement liées l'une à l'autre que, par l'entremise des points et droites harmoniquement associés d'une part, des points réciproques ou des transversales réciproques d'autre part, on peut trouver la droite ν (connaissant μ), si l'on sait trouver N (connaissant M); et réciproquement.

Au fond, dans les lignes qui précédent, nous transportons dans la géométrie du triangle le principe si fécond de la transformation de Poncelet.

32. Points et droites associés *(sens général)*. — Ces réflexions conviennent tout aussi bien aux points et droites associés.

Si, à un point M, dont les coordonnées sont

$$A, \quad B, \quad C,$$

on associe une droite μ, celle-ci correspondant à l'équation

$$\alpha f(A,B,C) + \beta f(B,C,A) + \gamma f(C,A,B) = 0;$$

on voit qu'il suffira, pour construire μ : 1° de déterminer le point M' (associé à M) et dont les coordonnées sont

$$f(A,B,C),\ f(B,C,A),\ f(C,A,B);$$

2° de prendre la droite μ' harmoniquement associée à ce point M'.

3° enfin, la transversale réciproque de μ'.

Avant de résumer, comme nous allons le faire tout à l'heure, les lois les plus simples qui permettent d'associer à un point donné, des éléments nouveaux, nous ferons observer que les idées développées dans ce paragraphe, et dans le précédent, permettent d'étendre : 1° aux droites associées, 2° aux points et droites associés, tout ce que nous avons dit plus haut pour les points associés, sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage sur cette généralisation évidente. *(A suivre.)*

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur au Collège de Vire.

(*Suite*, voir p. 233.)

18. — Lemme. Si une droite est partagée en deux segments de longueur a et b et que sur chacun de ces segments on décrive une circonférence, la portion l de tangente commune extérieure comprise entre les points de contact est moyenne proportionnelle entre les segments a et b.

19. — On considère un triangle ABC, sur chacun des segments déterminés par la bissectrice intérieure de l'angle A sur le côté a, on décrit des demi-cercles, et l'on désigne par l_a la longueur de la portion de tangente commune extérieure comprise entre les points de contact sur ces demi-cercles, et l_b, l_c les quantités analogues pour les autres côtés; on a la relation :

$$\frac{\sqrt{a}}{l_a}+\frac{\sqrt{b}}{l_b}+\frac{\sqrt{c}}{l_c}=2\sqrt{\frac{p}{\mathrm{R}r}}.$$

29. — Si, sur une droite on porte à la suite l'un de l'autre les deux segments soustractifs déterminés sur le côté a par la bissectrice extérieure de l'angle A d'un triangle ABC, et que sur chacun d'eux comme diamètre on décrive une cir-

conférence, si l'_a désigne la portion de tangente commune extérieure à ces circonférences et l'_b, l'_c les longueurs analogues pour les côtés b et c, on a la relation :

$$\frac{\sqrt{b}}{l'_b} = \frac{\sqrt{a}}{l'_a} + \frac{\sqrt{c}}{l'_c}.$$

21. — l_a, l'_a .... ayant la même signification qu'aux deux exercices précédents ; on a les relations :

$$(b+c)l_a + (a+c)l_b + (a+b)l_c = (b-c)l'_a + (a-c)l'_b + (a-b)l'_c$$

$$\frac{a}{l_a l'_a} + \frac{c}{l_c l'_c} = \frac{b}{l_b l'_b}.$$

22. — Si l_a, l_b, l_c désignent des quantités analogues aux précédentes, pour les segments déterminés sur les côtés par les hauteurs. On a la relation

$$a^2 l_a^2 + b^2 l_b^2 + c^2 l_c^2 = 4S^2.$$

23. — Si on substitue aux hauteurs les médianes, on a

$$l_a + l_b + l_c = p.$$

En effet on a évidemment dans ce cas $l_a = \frac{a}{2}$, $l_b = \frac{b}{2}$, $l_c = \frac{c}{2}$.

24. — Si l_a, l_b, l_c désignent toujours des quantités analogues aux précédentes pour les segments déterminés sur chaque côté par le point de contact du cercle inscrit. On a :

$$l_a l_b l_c = Sr, \qquad \frac{1}{l_a^2} + \frac{1}{l_b^2} + \frac{1}{l_c^2} = \frac{1}{r^2},$$

l_a, l_b, l_c sont les demi-axes non transverses des hyperboles considérées n° 13.

25. — Le cercle ex-inscrit r' détermine sur le côté a deux segments additifs, sur b et c deux segments soustractifs, si l'_a, l'_b, l'_c désignent des quantités analogues aux précédentes pour les côtés a, b, c; si, en outre l''_a, l''_b, l''_c, l'''_a... désignent de même, d'autres quantités analogues ponr les segments déterminés par les points de contact des autres cercles ex-inscrits, on a les relations

(1) $l'_a l'_b l'_c = Sr'$, $\quad l''_a l''_b l''_c = Sr''$, $\quad l'''_a l'''_b l'''_c = Sr'''$,

(2) $l'_b l'_c = pl'_a$, $\quad l''_a l''_c = pl''_b$, $\quad l'''_a l'''_b = pl'''_c$,

$$(3)\qquad l'_a l''_b l'''_c = Sr = l_a l_b l_c,$$
$$(4)\qquad l''_a = l'''_a, \qquad l'_b = l'''_b, \qquad l'_c = l''_c,$$
$$(5)\qquad l''^2_a + l'''^2_b + l'^2_c = l'''^2_a + l'^2_b + l''^2_c = p^2,$$
$$(6)\qquad l''_a l'''_b l'_c = l'''_a l'_b l''_c = Sp,$$
$$(7)\qquad \frac{l'_b l'_c}{l'_a} = \frac{l''_a l''_c}{l''_b} = \frac{l'''_a l'''_b}{l'''_c} = p,$$
$$(8)\qquad \frac{l_a l_b l_c}{r} = \frac{l'_a l'_b l'_c}{r'} = \frac{l''_a l''_b l''_c}{r''} = \frac{l'''_a l'''_b l'''_c}{r'''} = S.$$

$l_a l_b l_c$ ayant même signification qu'au numéro précédent.

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE

Nous signalons à l'attention de nos lecteurs un ouvrage qui vient de paraître et qui a pour titre : « *Théorie des équations et des inéquations du premier et du second degré à une inconnue* ».

L'auteur est M. Tartinville, professeur de mathématiques élémentaires au lycée Saint-Louis.

Cet ouvrage nous paraît appelé à rendre de réels services aux élèves qui veulent posséder à fond cette partie si importante de l'algèbre qui se rattache à la fonction du second degré.

Toute cette théorie est traitée avec le plus grand soin. De nombreuses applications accompagnent chacune des questions et, ainsi, aident à leur intelligence. Enfin, un certain nombre de problèmes, où l'on rencontre toutes les difficultés qui peuvent se présenter, sont discutées complètement.

Nous sommes convaincu que les candidats aux différentes écoles nous saurons gré de leur avoir fait connaître cet excellent ouvrage.

G. L.

QUESTIONS D'EXAMENS

ÉCOLES D'ARTS ET MÉTIERS (1885)

I. On donne un cercle O et trois points m, n, p, placés sur la circonférence. Inscrire dans ce cercle un triangle ABC tel que les trois points donnés soient les milieux des arcs sous-tendus par les trois côtés.

II. Calculer à moins d'un centimètre près le périmètre et déterminer exactement la surface d'un polygone régulier de 12 côtés inscrit dans un cercle de $1^m,56$ de diamètre. On vérifiera par le calcul et l'on dé-

montrera géométriquement que la surface de ce *dodécagone* est triple de celle du carré construit sur le rayon du cercle circonscrit.

(17 juillet 1885, de 9 h. à 10 h. et demie.)

Arithmétique.

I. Calculer à moins d'un franc près, le prix d'un champ de 5 arpents, 28 perches 2/3 situé dans un pays où l'hectare superficiel coûte 3000 francs. On sait d'ailleurs qu'une toise équivaut à $1^m,94904$ et que l'arpent de Paris était composé de 100 perches ayant chacune 3 *toises* de côté.

II. Un marchand remplit une pièce de 228^l avec deux sortes de vin ordinaire qui lui coûtent l'un 0 fr. 50 et l'autre 0 fr. 65 le litre et avec du vin de Bordeaux à 0 fr. 80 le litre. Il emploie 5 fois plus de vin de Bordeaux que de vin à 0 fr. 50, et 6 fois moins de vin à 0 fr. 50 que de vin à 0 fr. 65. On demande 1° Combien il entre de litres de chaque espèce de vin dans le mélange ainsi obtenu ; 2° A quel prix le marchand devra-t-il vendre le litre de mélange pour réaliser un bénéfice de 20 o/o ?

AGRÉGATION MATHÉMATIQUE DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

(ANNÉE 1885)

Mécanique.

Un corps solide homogène de densité 1,5, a la forme d'un cylindre droit, dont le rayon est R et la hauteur $0^m,45$. On fixe les deux extrémités d'une arête, et on fait exécuter au solide de petites oscillations autour de cette droite, l'écart initial étant 6° et la vitesse initiale nulle : 1° Calculer le moment d'inertie relatif à l'axe de suspension ; 2° Déterminer R de manière que le solide exécute deux oscillations par seconde ; 3° Quelle est, dans ces conditions, la force vive du solide au moment où il passe par sa position d'équilibre ; 4° Trouver les axes de suspension, parallèles au premier, qui donneraient la même durée pour l'oscillation.

Géométrie descriptive.

Une hélice est tracée sur un cylindre circulaire droit à axe vertical. Construire l'ombre portée obliquement par cette courbe sur le plan horizontal (rayons parallèles). On fera l'épure, à main levée, dans le cas le plus simple.

Algèbre et trigonométrie.

Dans un triangle rectangle AOB, on donne les deux côtés de l'angle droit $OB = a$, $OA = b$, ainsi qu'un point H situé sur OA ou sur son prolongement. Trouver sur OB un point C tel que le triangle BCD ait une surface égale à la moitié de celle de AOB. Résoudre le triangle BCD dans le cas où OH et OA, étant de même sens, le premier est triple du second. Effectuer numériquement cette résolution en supposant $a = 3^m$ et $b = 4^m$.

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE
SPÉCIAL (PARIS)

Mathématiques.

5 et 6 août 1886. — I. Un cône circulaire droit SAB et un cylindre circulaire droit ABDC ont même hauteur SO appelée h, et même base : le cercle AB de rayon R. On demande à quelle distance x de la base AB il faut mener un plan EF, parallèle à cette base, pour que le tronc de cône AIKB, soit équivalent au volume compris entre le cylindre AEFB et ce même tronc de cône AIKB.

II Décrire la vis sans fin. Dire à quoi elle sert?

CERTIFICAT D'ÉTUDES DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL
(ANNÉE 1886)

Mathématiques.

30 et 31 juillet. — I. On donne un angle droit MON et un point P pris sur la bissectrice de cet angle; mener par le point P une droite AB limitée aux deux côtés de l'angle de telle sorte que l'aire du triangle AOB soit équivalente à un carré de côté a. La longueur $OP = d$. On cherchera la longueur x de OA. Discussion.

II. Epure à main levée de l'intersection d'une droite donnée par ses projections et d'un plan donné par ses traces. — Légende.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET
PARIS 1886 (*)

Mathématiques.

9 juillet. — I. Inégalité des jours et des nuits.

II. D'un point M, mobile sur la base BC d'un triangle, on abaisse des perpendiculaires MP, MQ sur les deux autres côtés. On demande le minimum de la somme des carrés de ces deux perpendiculaires

Rép. $$\frac{b^2c^2 \sin^2 A}{b^2 + c^2}.$$

(*) Ces énoncés, avec l'indication des résultats, sont empruntés au recueil publié par la librairie Croville-Morant et Foucart (*Journal des examens de la Sorbonne,* 20, rue de la Sorbonne).

Nous prions ceux de nos lecteurs qui connaissent les énoncés des sujets proposés aux examens du Baccalauréat, dans les diverses facultés de province, de nous les envoyer; nous les publierons bien volontiers.

10 juillet. — I. Étant donné le secteur circulaire droit BOA et la tangente en A, mener une tangente DE telle que le trapèze OAED soit équivalent à un carré donné.

Rép. $x = \dfrac{2a^2 \pm \sqrt{4a^4 - 3R^4}}{3R}.$

II. Déterminer la résultante de deux forces parallèles et de sens contraire.

12 juillet. — I. On donne un carré ABCD dont le côté AB = a. Par le centre O de ce carré on élève sur son plan une perpendiculaire, sur laquelle on prend un point S tel que le triangle ASB soit équilatéral. Calculer : 1° le volume de la pyramide SABCD; 2° l'angle du plan ASB avec le plan de la base.

Rép. $V = \dfrac{a^3}{3\sqrt{2}}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

II. Nommer les planètes dans l'ordre de leur distance au soleil. — Enoncer les lois de Képler.

16 juillet. — I. Quelles valeurs faut-il donner à la constante m pour que le trinôme $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6$ reste positif, quel que soit x ?

Rép. $m < 1$ ou $m > 3$.

II. Enoncer et démontrer la propriété fondamentale de la tangente à la parabole.

17 juillet. — I. Démontrer que le plus petit commun multiple de deux nombres entiers A et B ayant pour plus grand commun diviseur D est égal à $\dfrac{A \times B}{D}$.

II. Les angles A et B d'un triangle ont pour valeur A = 60°, B = 45°; la somme des carrés des 3 côtés du triangle est égale à une quantité donnée K^2. On demande de calculer les longueurs des côtés sans avoir recours aux tables de logarithmes.

Rép. $a = \dfrac{k\sqrt{3}}{\sqrt{7+\sqrt{3}}}$ $b = \dfrac{k\sqrt{2}}{\sqrt{7+\sqrt{3}}}$ $c = \dfrac{k\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{7+\sqrt{3}}}.$

19 juillet. — I. Résoudre le système de deux équations

$$ax + by = ap + bq,$$
$$x^2 + y^2 + xy = p^2 + q^2 + pq.$$

1re *Rép.* $x = p,\quad y = q.$

2me *Rép.* $x = \dfrac{p(a^2 - b^2) + qb(2a - b)}{a^2 + b^2 - ab}$ $y = \dfrac{-q(a^2 - b^2) + pa(2b - a)}{a^2 + b^2 - ab}.$

II. Pour que trois forces appliquées à un corps solide libre se fassent équilibre, il est nécessaire qu'elles soient dans un même plan et que deux d'entre elles aient une résultante égale et directement opposée à la troisième.

20 juillet. — I. On donne un hémisphère AO A'H, de rayon R; on demande de mener deux plans BB', DD' parallèles au plan de la base AA' de l'hémisphère de façon : 1° que la surface de la zône BB', DD' soit égal au tiers de la surface de l'hémisphère; 2° Que l'on ait $\overline{EC}^2 = OC \times HE$. Le rayon OCEH est perpendiculaire sur la base de l'hémisphère.

II. Définir le jour solaire vrai et le jour sidéral, montrer ensuite que le premier est plus grand que le second et faire connaître une valeur approchée de la différence entre ces deux jours.

21 juillet. — I. Décomposer en un produit de facteurs du premier degré l'expression

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

Rép. $(b + c - a)(a + b - c)(a + c - b)(a + b + c).$

II. Un triangle équilatéral est situé dans un plan passant par la ligne de terre et faisant un angle de 60° avec le plan horizontal; connaissant les projections horizontales de deux de ses sommets, construire la projection horizontale du troisième sommet.

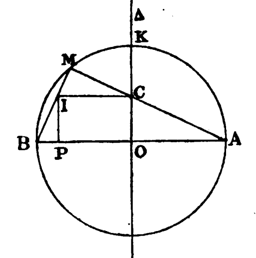
(A suivre.)

QUESTION 174

Solution par M. Pierre Chazeau, de Thiers (Puy-de-Dôme).

Soit O *un cercle; on considère, dans ce cercle, un diamètre fixe* AB *et le diamètre perpendiculaire* Δ. *Ayant pris un point* M, *mobile sur* O, *on joint* MA *et* MB. — MA *rencontre* Δ *en* C. *Si par* C *on mène une parallèle à* AB, *elle rencontre* MB *en un certain point* I. — *Démontrer que le lieu décrit par* I *est une parabole.* (G. L.)

Du point I j'abaisse la perpendiculaire IP sur BA.



Les triangles semblables BIP, OCA donnent :

$$\frac{OC}{OA} = \frac{BP}{IP},$$

d'où $\overline{IP}^2 = R \times BP$.

Cette relation montre que le lieu du point I est une parabole dont le sommet est en B, dont l'axe est BA et qui passe par K; conditions qui la déterminent complètement.

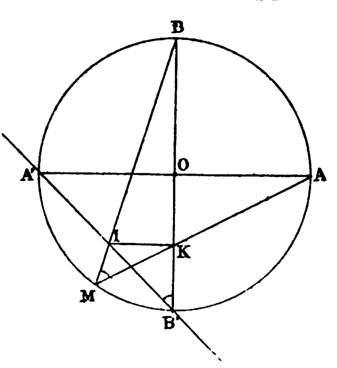
Nota. — Solutions diverses par MM. Rogier; Couade; Chapron; Henri Martin, au lycée Condorcet; L. Prince et G. Bourdier, élèves au lycée de Grenoble.

QUESTION 176

Solution par M. Giovanni Russo, à Catanzaro.

On donne un cercle Γ *et deux rayons rectangulaires* OA. OB*; soit* M *un point mobile sur* Γ *:* MA *rencontre* OB *en* K*; la perpendiculaire élevée au point* K *à la droite* OB *rencontre* MB *en un point* I. — *Démontrer que le lieu décrit par le point* I *est une droite.* (G. L.)

Il est visible que les points A′, B′ diamétralement opposés aux points A et B, font partie du lieu. Il faut donc prouver que le lieu du point I est la droite A′B′. En effet, soit I un point du lieu ; alors les quatre points I, K, B′, M étant sur une même circonférence, l'angle KB′I = KMI. Mais l'angle KMI est égal à la moitié d'un angle droit ; donc le point I se trouve sur la droite A′B′ ; cette droite constitue donc le lieu demandé.



NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Lacombe, élève au lycée de Périgueux; Chapron; Couade; Edmond Bordage, professeur au collège de Nantua; Rogier; L. Prince, élève au lycée de Grenoble; A. Fitz-Patrick, élève au lycée de Poitiers; Henri Martin, élève au lycée Condorcet; G. Bourdier, au lycée de Grenoble.

QUESTION 177

Solution par M. L. Prince, élève au Lycée de Grenoble.

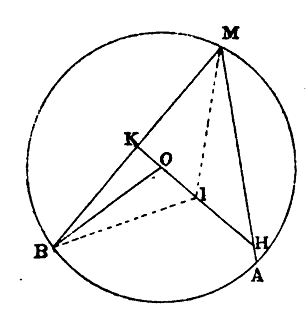
Soient A *et* B *deux points fixes sur un cercle donné* Γ *de centre* O*; on prend sur* Γ *un point mobile* M *que l'on joint aux points* A *et* B. *La perpendiculaire abaissée du centre* O *sur* MB

rencontre les cordes MA, MB *en deux points* H *et* K; *démontrer que le lieu décrit par le milieu de* HK *est une circonférence.*

(G. L.)

Soit I le milieu de HK, joignons IB, IM,

$$\widehat{OIB} = KIM.$$



L'angle $\widehat{BMA}$ étant constant, le triangle KMH reste semblable à lui-même et la médiane MI fait un angle constant avec le côté KH. L'angle $\widehat{OIM} = \widehat{OIB}$ étant invariable, le lieu du point I est un segment de cercle décrit sur OB. Si M décrit toute la circonférence Γ, I décrira la circonférence OIB complète.

On peut observer que si I au lieu d'être le milieu de HK, divisait HK dans un rapport donné, le lieu de I serait encore une circonférence.

NOTA. — Solutions analogues par MM. Rogier; Chapron; Henri Martin, élève du lycée Condorcet; G. Bourdier, du lycée de Grenoble.

M. Chapron généralise la question en supposant que la droite HK est abaissée obliquement sur MB, mais sous un angle constant.

M. H. Martin fait observer que le centre de gravité, le centre du cercle inscrit, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit du triangle MHK décrivent des circonférences (*Question du concours de troisième*, 1885).

QUESTION 178

Solution par M. E. VIGARIÉ.

Démontrer que si d *est la distance du centre du cercle circonscrit du triangle* ABC, *au point de concours des droites qui joignent les sommets aux points de contact des cercles ex-inscrits et si* R *et* r *sont les rayons du cercle circonscrit et du cercle inscrit on a:*

$$\frac{d}{2} = \frac{R}{2} - r. \ (*)$$

(*) Énoncé rectifié.

Le point I_1' de concours des droites qui joignent les sommets du triangle au point de contact des cercles ex-inscrits, ou *point de Nagel* est le centre du cercle inscrit au triangle $A_1'B_1'C_1'$ formé en menant par les sommets de ABC des parallèles aux côtés opposés. Le centre du cercle circonscrit de ABC est le centre du cercle des neuf points *(cercle d'Euler)* de $A_1'B_1'C_1'$. Si R' et r' sont les rayons du cercle circonscrit et du cercle inscrit à ce dernier triangle on a la relation connue :

$$\frac{d}{2} = \frac{R'}{4} - \frac{r'}{2} = \frac{R}{2} - r.$$

Cette formule n'est pas nouvelle. Elle a été donnée pour la *première fois*, croyons-nous, par M. Nagel dans un travail intitulé : *Untersuchungen über die wichtigsten zum Dreieck gehörigen Kreise* (Leipzig 1836). En 1864 elle a été donnée de nouveau par M. F.-J. Harnischmacher (*Archives de Grunert*, t. XLII). Enfin en 1871, M. Ad. Hochheim (*Archives de Grunert*, t. LII) dans une note ayant pour titre : « *Ueber den fünften merkwürdigen Punkt* » a donné pour d la valeur suivante:

$$d^2 = R^2[\{\sin(A - B) - 2\sin A + 2\sin B\}^2$$
$$+ \{\sin A \sin B - 2\cos A\cos B - 2 + 2(\cos A + \cos B)\}^2].$$

Cette formule est plus compliquée et moins élégante que les précédentes.

QUESTION 181

Solution par M. A. Drago, au Lycée de Marseille.

Résoudre les équations

$$x^2 - yz = a^2,$$
$$y^2 - xz = b^2,$$
$$z^2 - xy = c^2,$$

en déduisant de celles-ci deux équations du premier degré.

Élevons la première au carré et retranchons de ce carré le produit des deux autres. Il vient, en mettant x en facteur commun :

$$x(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = a^4 - b^2c^2, \qquad (1)$$

on aurait de même

$$y(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = b^4 - a^2c^2, \qquad (2)$$
$$z(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = c^4 - a^2b^2. \qquad (3)$$

Divisons les équations (1) et (2) membre à membre ainsi que les équations (1) et (3), nous obtiendrons les deux équations du premier degré :

$$\frac{x}{a^4 - b^2c^2} = \frac{y}{b^4 - a^2c^2} = \frac{z}{c^4 - a^2b^2}.$$

Élevons la première de ces fractions au carré, et retranchons de ce carré le produit des deux autres, nous avons

$$\frac{x^2}{(a^4 - b^2c^2)^2} = \frac{a^2}{(a^4 - b^2c^2)^2 - (b^4 - a^2c^2)(c^4 - a^2b^2)}.$$

Effectuant, et divisant par a^2, il vient

$$\frac{x^2}{(a^4 - b^2c^2)^2} = \frac{1}{a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2},$$

d'où

$$x^2 = \frac{(a^4 - b^2c^2)^2}{a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2}.$$

On aurait de même

$$y^2 = \frac{(b^4 - a^2c^2)^2}{a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2}$$

$$z^2 = \frac{(c^4 - a^2b^2)^2}{a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2}.$$

Nota. — Cette solution, la meilleure que nous ayions reçue, exigerait encore certains compléments. Les valeurs des inconnues ne sont pas discutées. Pour établir cette discussion, il fallait observer que

$$a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)\left\{(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2\right\}.$$

Solutions par MM. Durand, élève au collège de Perpignan; Naudin, élève au lycée Charlemagne (classe de M. Richard); Ch. Costa, élève à l'école Albert-le-Grand (Arcueil); Henri Martin, lycée Condorcet et J. Chapron.

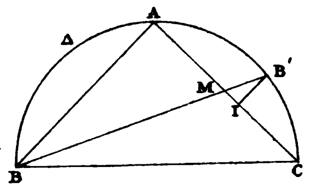
QUESTION 185

Solution et **Généralisation** par M. J. Chapron.

On donne un demi-cercle Δ *décrit sur le diamètre* BC *et l'on considère le triangle rectangle isoscèle* BAC *inscrit dans ce cercle. Soit* M *le milieu du côté* AC; *la droite* BM *rencontre* Δ *en* B'.

On propose de démontrer que B′ *est trois fois plus éloigné de* AB *que de* AC. (G. L.)

Les autres conditions restant les mêmes, si M partage le côté AC dans le rapport $\frac{AM}{MC} = n$, le rapport des distances du point B′ aux côtés AB, AC sera $\frac{AI}{B'I} = 2n + 1$ (I est le pied de la perpendiculaire abaissée de B′ sur AC).



On a d'abord

$$BM.B'M = AM.CM = n.\overline{MC}^2.$$

Divisons par $\overline{BM}^2$; nous avons alors

$$\frac{B'M}{BM} = n\frac{\overline{MC}^2}{\overline{BM}^2} = n\frac{\overline{MC}^2}{\overline{AB}^2 + \overline{AM}^2} = \frac{MI}{AM}.$$

Mais

$$\frac{MC}{AC} = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{AM}{AC} = \frac{n}{n+1}.$$

Donc

$$\frac{MI}{AM} = \frac{n}{n^2 + (n^2+1)^2}, \quad \frac{MI}{AM + MI} = \frac{MI}{AI} = \frac{n}{(n+1)(2n+1)}.$$

De plus, les triangles rectangles semblables B′IM, ABM, donnent :

$$\frac{B'I}{MI} = \frac{AB}{AM} = \frac{n+1}{n}.$$

Donc

$$\frac{B'I}{AI} = \frac{B'I}{MI}.\frac{MI}{AI} = \frac{1}{2n+1}.$$

En particulier, si $n = 1$,

$$AI = 3.B'I.$$

NOTA. — Solutions par MM. L. Prince, élève au lycee de Grenoble; Giovanni Russo à Catanzaro; N. Gr. Balanesco (Focsiani, Roumanie); Georges Caye, élève au lycée Charlemagne (classe de M. Richard); Emile Vigarié, élève à l'école des Mines; Henri Martin, élève au lycée Condorcet; G. Bourdier, élève au lycée de Grenoble; Edmond Bordage, professeur au collège de Nantua.

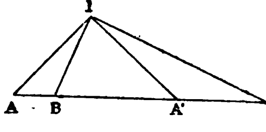
QUESTION 189

Solution par M. Louis Prince, élève de Mathématiques élémentaires au Lycée de Grenoble.

Soient ABA'B' *quatre points en ligne droite, trouver le lieu des points* I *d'où les segments* AB *et* A'B' *sont vus sous le même angle.*

(*Saint-Cyr, examens oraux, 1884.*

Les triangles AIB, A'IB' ont même hauteur et même angle au sommet, donc



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{IA.IB}{IA'.IB'}.$$

Pour les triangles AIA', BIB', on a de même

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{IA.IA'}{IB.IB'}.$$

D'où en multipliant membre à membre

$$\frac{\overline{IA}^2}{\overline{IB'}^2} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{AA'}{BB'}.$$

Le rapport $\frac{IA}{IB'}$ étant constant, le lieu de I est une circonférence que l'on construit comme l'on sait.

On déterminerait de la même façon le lieu d'où l'on voit deux segments AB A'B' en ligne droite sous des angles supplémentaires.

Nota. — Autre solution par M. Vigarié qui observe que le lieu géométrique en question peut servir à résoudre le problème suivant : trois segments AA', BB', CC' en ligne droite étant donnés trouver les points d'où ces segments sont vus sous le même angle.

QUESTIONS PROPOSÉES

229. — On donne, dans un plan, un angle xCy et un point A. Par les points A, C, on fait passer deux circonférences. Soient E, F, puis G, H les points où elles coupent, respectivement, les côtés de l'angle. Sur CE et CH, on construit le parallélogramme ECHP. Sur CF et CG, on construit le parallélogramme FCGQ. Cela posé : 1° la droite PQ est perpendiculaire à la droite de Simson, relative aux données ; 2° elle passe au point de concours des cordes EF, GH.

(Catalan.)

230. — Démontrer que dans un triangle ABC les milieux des droites qui joignent deux à deux le *point de Nagel* et ses *points algébriquement adjoints* sont six points d'une même circonférence qui passe par les sommets du triangle obtenu en menant par les sommets de ABC des parallèles aux côtés opposés.

(E. Vigarié.)

N.-B. — Le point de Nagel est le réciproque du point de Gergonne et celui-ci s'obtient en joignant les sommets du triangle aux points de contact du cercle inscrit.

Nous rappelons aussi que les points algébriquement adjoints d'un point donné sont ceux qui admettent les mêmes coordonnées, *au signe près*.

G. L.

231. — Lorsqu'un cercle mobile Δ passe par le centre de gravité d'un triangle ABC, la somme des puissances des points A, B, C, par rapport à Δ, est constante et égale à

$$\frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2}{3}.$$

Démontrer cette remarque et la généraliser. *(G. L.)*

232. — Si on ajoute, terme à terme, m progressions géométriques, la suite U obtenue est récurrente ; c'est-à-dire, qu'à partir du terme de rang $m + 1$, les autres sont fournis par une fonction des m précédents ; cette fonction est linéaire.

(Boutin.)

NOTA. — La question proposée par M. Boutin, et c'est un signalement qu'il nous a lui-même donné, est une généralisation de la question 8 (*J. M. E.*, 1877, p. 31). On pourra se borner, pour plus de facilité, à prendre le cas de *trois* progressions géométriques et l'on montrera que, pour des valeurs convenables des paramètres α, β, γ, δ, on a

$$\alpha u_p + \beta u_{p-1} + \gamma u_{p-2} + \delta u_{p-3} = 0,$$

quel que soit le nombre entier p; u_{p-1}, u_{p-2}, u_{p-3}, désignant quatre termes consécutifs de la suite U.

G. L.

233. — Étant données deux circonférences O et O′, on mène les rayons OA, O′B qui se coupent en C, sous un angle constant, et l'on demande le lieu géométrique du milieu M de la droite AB.

(A. Fitz-Patrick.)

234. — Montrer que la somme des surfaces de tous les triangles formés, chacun avec les médianes du précédent, le triangle ABC étant le premier d'entre eux, a pour limite le quadruple de la surface de ce triangle ABC.

(G. Russo, à Catanzaro.)

235. — Si A, B, C sont les angles d'un triangle, on a

$$1 + \sin\left(B + \frac{A}{2}\right) + \sin\left(C + \frac{B}{2}\right) + \sin\left(A + \frac{C}{2}\right)$$
$$= 4\cos\frac{B - A}{4}\cos\frac{C - B}{4}\cos\frac{A - C}{4}.$$

(Boutin.)

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 21806-6.

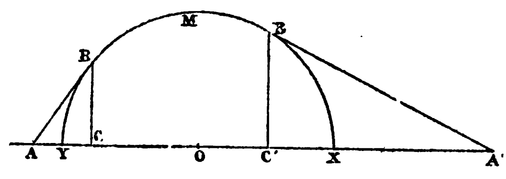
RÉSOLUTION DU SYSTÈME

DE DEUX INÉGALITÉS DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE

Par M. **E. Lauvernay**, professeur au Collège Rollin.

(*Suite*, voir p. 241.)

1re QUESTION. — *Étant donnés la longueur* AA′ = d *et le rayon* R *d'une circonférence donnée en position, déterminer sur le diamètre* XY *les points* A, A′, *tels qu'en menant par ces points les tangentes* AB, A′B′ *la surface engendrée par* ABMB′A″A′ *en tournant autour de* XY *soit égale à* $4m\pi R^2$



(On suppose $d > 2R$ et O entre A et A′).

Soient $AO = x$ $OA' = y$, les équations du problème sont :

$$x + y = d$$

$$2\pi R\left(\frac{R^2}{x} + \frac{R^2}{y}\right) + \pi\frac{R}{x}(x^2 - R^2) + \pi\frac{R}{y}(y^2 - R^2) = 4m\pi R^2$$

d'où l'on déduit

$$xy = \frac{R^2 d}{4mR - d}.$$

La somme et le produit des inconnues étant connus, le problème est donc résolu par l'équation :

$$z^2 - dz + \frac{R^2 d}{4mR - d}.$$

Discussion. — D'après l'enoncé de la question, x et y sont des quantités positives, par conséquent, on a $xy > 0$, ce qui conduit à la condition $d < 4mR$; et la condition de réalité des racines de l'équation en z est :

$$d^2 - \frac{4R^2 d}{4mR - d} \geqslant 0$$

ou $$d^2 - 4mRd + 4R^2 \leqslant 0. \qquad (1)$$

Ce qui exige 1° que les racines d', d'' de l'équation obtenue en égalant ce trinôme à zéro, soient réelles,

ou $$m > 1.$$

2° que d soit compris entre d' et d''. Or, on a déjà $d < 4mR$; il faut donc reconnaître l'ordre de grandeur des trois quantités d', d'', $4mR$; la substitution de $4mR$ dans le trinôme (1) donne $+ 4R^2$, et $4mR$ étant supérieur à la demi-somme des racines d', d'' on a

$$d' < d'' < 4mR.$$

Enfin, d'après l'enoncé, on doit avoir $d > 2R$; or la substitution de $2R$ dans la trinôme donnant un résultat négatif, on a $d' < 2R < d''$, donc la condition algébrique du problème se réduit à $d < d''$, à laquelle on doit joindre la condition imposée *à priori*

$$d < 2R.$$

D'autre part, les considérations géométriques prouvent que les racines de l'équation en z doivent être supérieures à R, et puisque l'on a $\frac{d}{2} > R$, il suffit et il est nécessaire que la substitution de R à z, dans le premier membre de cette équation, donne un résultat positif, ce qui conduit à l'inégalité :

$$d^2 - 4mRd + 4mR^2 > 0. \qquad (2)$$

En égalant ce trinôme à zéro on obtient deux racines réelles d_1, d_2; nous supposons $d_1 < d_2$. Or le cofficient de d étant le même dans les trinômes (1) et (2) et $4mR^2$ étant supérieur à $4R^2$, puisque $m > 1$, on a $d' < d_1 < d_2 < d''$ et la solution du système des inégalités (1) et (2) est : $d' < d < d_1$ ou $d_2 < d < d''$; mais $2R$ substitué à d, dans le trinôme (2) donnant un résultat négatif, les inégalités $d < d_1$, $d > 2R$ seraient contradictoires, puisque $2R > d_1$, donc les conditions du problème se réduisent à :

$$d_2 < d < d''.$$

Ainsi, en résumé, le problème admet une solution et une seule à la condition que l'on ait :

$$2R(m + \sqrt{m^2 - m}) < d < 2R(m + \sqrt{m^2 - 1}).$$

2° Question. — *Déterminer les trois côtés d'un triangle connaissant son périmètre* 2p, *la somme* a^2 *des carrés des côtés et sachant*

que le double produit de deux côtés est égal au produit leur somme par le troisième côté.

x, y, z, désignant les trois côtés du triangle, les équations du problème sont

$$x + y + z = p,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$
$$2xy = z(x + y).$$

Élevant au carré la première et retranchant de l'équation obtenue la seconde, on a :

$$4p^2 - a^2 = 2xy + 2z(x + y) = 3z(x + y).$$

Remplaçant $x + y$ par $2p - z$ dans cette dernière relation, on a l'équation suivante déterminant z :

$$3z^2 - 6pz + 4p^2 - a^2 = 0, \qquad (1)$$

z étant connu, d'après les relations

$$x + y = 2p - z,$$
$$xy = \frac{z(2p - z)}{2},$$

x et y sont les racines de l'équation :

$$X^2 - X(2p - z) + \frac{z(2p - z)}{2} = 0, \qquad (2)$$

Discussion. — La demi-somme des racines de l'équation en z étant p, seule, la plus petite racine de cette équation peut convenir si elle est réelle et positive, ce qui conduit aux conditions:

$$p < a < 2p.$$

D'autre part, la condition de réalité de x et y est

$$z < \frac{2p}{3};$$

donc la substitution de $\frac{2p}{3}$ à z dans le premier membre de l'équation (1) doit donner un résultat négatif, puisque $\frac{2p}{3}$ est inférieur à p, demi-somme des racines de cette équation, ce qui conduit à cette nouvelle condition :

$$\frac{4p^2}{3} - a^2 < 0.$$

ou $$a > \frac{2p}{\sqrt{3}}.$$

On aura donc, *a fortiori* $a > p$, c'est-à-dire que les nouvelles limites de a sont

$$\frac{2p}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad 2p.$$

De l'inégalité $z < \frac{2p}{3}$, résulte que si x désigne le plus grand des deux autres côtés, on doit avoir $x < p$ et $y > \frac{p}{3}$, donc les résultats de la substitution de p et de $\frac{p}{3}$ à X dans le premier membre de l'équation (2) doivent être tous deux positifs, ce qui donne

$$\begin{cases} -2p^2 + 4pz - z^2 > 0, \\ -10p^2 + 24pz - 9z^2 > 0, \end{cases}$$

ou $$z > \frac{2p^2 + a^2}{6p}, \quad \text{et} \quad z > \frac{3a^2 - 2p^2}{6p}, \qquad (3)$$

en se servant de la relation $3z^2 = 6pz + a^2 - 4p^2$; et ce qui est suffisant, puisque l'on a certainement :

$$\frac{p}{3} < \frac{2p - z}{2} < p.$$

Or, pour satisfaire aux inégalités (3) 1° Il faut que chacune des deux quantités $\frac{2p^2 + a^2}{6p}$, $\frac{3a^2 - 2p^2}{6p}$ soit inférieure à p, ce qui a toujours lieu pour la première, d'après la condition $a < 2p$, et ce qui exige que l'on ait, pour la seconde,

$$a < 2p\sqrt{\frac{2}{3}},$$

de sorte que les nouvelles limites de a sont renfermées dans les inégalités :

$$\frac{4p^2}{3} < a^2 < \frac{8p^2}{3},$$

ou $$\frac{2p}{\sqrt{3}} < a < 2p\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

2° Il faut que les résultats de la substitution de ces mêmes quantités à z dans le premier membre de l'équation (1) soient

positifs, ce qui conduit aux deux inégalités :

$$a^4 - 20a^2p^2 + 28p^4 > 0,$$
$$9a^4 - 60a^2p^2 + 76p^4 > 0.$$

Il reste donc à reconnaître l'ordre de grandeur des six quantités $\frac{4p^2}{3}$, $\frac{8p^2}{3}$ et les racines des deux équations

$$\left.\begin{matrix} a^4 - 20a^2p^2 + 28p^4 = 0 \\ 9a^4 - 60a^2p^2 + 76p^4 = 0 \end{matrix}\right\}, \qquad (4)$$

dans lesquelles on regardera a^2 comme inconnue. Or $\frac{4p^2}{3}$ substitué à a^2 dans chacun de ces trinômes donne des résultats positifs et puisque l'on a

$$\frac{4p^2}{3} < 10p^2 \quad \text{et} \quad \frac{4p^2}{3} < \frac{30p^2}{9}$$

$\frac{4p^2}{3}$ est inférieur aux racines des équations (4).

Au contraire, $\frac{8p^2}{3}$ substitué à a^2 dans ces mêmes trinômes donne des résultats négatifs, donc $\frac{8p^2}{3}$ est compris entre les racines des équations (4).

Enfin, en se reportant au tableau précédent (*) et en représentant $-\frac{20p^2}{3}$ par p, et $-20p^2$ par p', la valeur qui rend ces deux trinômes égaux est $\frac{22p^2}{15}$, valeur inférieure à $\frac{10p^2}{3}$; d'ailleurs la substitution de $\frac{22p^2}{15}$ à a^2, dans l'un de ces trinômes, donne un résultat positif; donc, si α', β' désignent les racines de l'équation

$$a^4 - 20a^2p^2 + 28p^4 = 0,$$

et α, β, celles de l'équation

$$9a^4 - 60a^2p^2 + 76p^4 = 0,$$

on a les inégalités

$$\frac{4p^2}{3} < \alpha' < \alpha < \frac{8p^2}{3} < \beta < \beta'.$$

(*) Voyez p. 243.

Or a^2 ne peut être supérieur à β', car on doit avoir $a^2 < \frac{8p^2}{3}$, par conséquent les conditions du problème sont

$$\frac{4p^2}{3} < a^2 < \alpha',$$

ou

$$\frac{4p^2}{3} < a^2 < p^2\left(10 - 6\sqrt{2}\right),$$

ou

$$\frac{2p}{\sqrt{3}} < a < p\sqrt{10 - 6\sqrt{2}};$$

et elles sont suffisantes, car, comme il est facile de le voir, chacun des côtés est moindre que la somme des deux autres; en outre, le problème n'admet qu'une seule solution.

GÉNÉRALITÉS SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

LES POINTS RÉCIPROQUES ET LES POTENTIELS D'ORDRE p

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Fin*, voir p. 243.)

33. Examen d'un cas particulier d'une droite et d'un point associés. — A propos de ces points et droites associés dont nous venons de parler, nous signalerons un cas particulier qui nous semble remarquable par les conséquences multiples qu'il nous paraît avoir.

Considérons une droite μ représentée par l'équation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0, \qquad (1)$$

puis, associons lui un point M dont les coordonnées soient proportionnelles à

$$\frac{a^2}{A(B - C)}, \qquad \frac{b^2}{B(C - A)}, \qquad \frac{c^2}{C(A - B)}. \qquad (2)$$

L'équation du cercle Γ circonscrit au triangle de référence étant

$$a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\beta\alpha = 0,$$

on voit d'abord que M est toujours situé sur Γ; parce que

l'on a

$$a^2b^2c^2 \sum \frac{1}{BC(C-A)(A-B)} = 0.$$

Ainsi, à toute droite remarquable μ, jetée dans le plan d'un triangle, correspondra, par une certaine loi géométrique qui nous reste à déterminer, un point remarquable situé sur le cercle circonscrit. Voici quelle est cette loi géométrique.

Soit A′ le point où μ rencontre le côté BC; la parallèle à μ, menée par A, recontre Γ en A″; la droite A′A″ et les droites analogues B′B″, C′C″ rencontrent Γ en un même point, qui est précisément M (*).

Cette proposition se démontre très simplement par les considérations les plus élémentaires. En cherchant la solution analytique qu'elle comporte, on tombe sur les formules d'association que nous venons d'indiquer; elles fournissent, en nombre indéfini, des points remarquables du triangle, situés sur le cercle circonscrit.

Par exemple, prenons la droite δ correspondant à l'équation

$$a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = 0.$$

Cette droite est la transversale réciproque de la droite de Lemoine et nous l'avons signalée dans notre note *sur un cercle remarquable du plan d'un triangle* (**). On trouve alors que le point qui lui est associé, d'après la loi que nous venons de faire connaître, est celui dont les coordonnées barycentriques sont proportionnelles à

$$\frac{1}{b^2-c^2}, \quad \frac{1}{c^2-a^2}, \quad \frac{1}{a^2-b^2};$$

c'est le point de Steiner.

34. Remarque relative aux points remarquables situés sur la circonférence circonscrite. — Par la remarque précédente nous avons voulu montrer un exemple de correspondance *de point à droite*, dans la géométrie du

(*) Ce théorème n'est pas nouveau; il a été proposé, il y a quelques années, par M. McKenzie dans l'*Educational times*, question 6871, et démontré : d'abord, dans le vol. XL (p. 66) ; puis, dans le volume XLIII 1885 p. 109) de *Mathematical questions and solutions*.

(**) *Journal de M. S.* (1886, p. 57).

triangle; et, dans cette intention, nous avons pris une droite et un point précédemment reconnus et étudiés, pour que l'application soit plus frappante. Mais n'est-il pas juste de dire que la simple observation que nous avons faite et qui se trouve résumée dans les formules (1) et (2), d'une part, et dans le théorème géométrique, ci-dessus énoncé, d'autre part, double les propriétés du triangle? Le plan d'un triangle est, si l'on peut dire, *constellé* de points remarquables. Parmi ces points, il en est, en nombre indéfini, qui appartiennent à la circonférence circonscrite à ce triangle. Les formules (2) permettront de les découvrir; l'équation (1) donnera les droites qui leur correspondent; enfin, le théorème de M. McKenzie permettra de trouver ces points, si l'on sait construire les droites correspondantes.

Il faut pourtant observer que si, dans la correspondance que nous venons de signaler, à une droite μ ne correspond qu'un seul point M, la réciproque n'est pas exacte. C'est ce que nous allons montrer.

Observons d'abord que les équations

$$\frac{A(B-C)}{\frac{a^2}{\alpha'}} = \frac{B(C-A)}{\frac{b^2}{\beta'}} = \frac{C(A-B)}{\frac{c^2}{\gamma'}} = \lambda.$$

ne sont compatibles que si le point M $(\alpha', \beta', \gamma')$ est situé sur la circonférence circonscrite au triangle; nous supposerons cette condition remplie.

En considérant A, B, C, comme les inconnues qui doivent être tirées de ces égalités, on a

$$(H)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{C} - \dfrac{1}{B} = \lambda\,\dfrac{a^2}{\alpha'}, \\ \dfrac{1}{A} - \dfrac{1}{C} = \lambda\,\dfrac{b^2}{\beta'}, \\ \dfrac{1}{B} - \dfrac{1}{A} = \lambda\,\dfrac{c^2}{\gamma'}. \end{cases}$$

La droite μ a une transversale réciproque μ_0 dont l'équation est

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} = 0,$$

et, d'après les formules (H), cette équation peut s'écrire

$$\frac{1}{C}(\alpha+\beta+\gamma)+\lambda\left(\frac{b^2\alpha}{\beta'}-\frac{a^2\beta}{\alpha'}\right)=0.$$

D'après cela, μ_0 est parallèle à la droite qui est représentée par l'équation

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^2}=\frac{\beta\beta'}{b^2}.$$

Nous pouvons conclure de là que, si l'on prend sur le cercle circonscrit Γ un point quelconque M, et si l'on considère le point inverse M_2 (point situé à l'infini), une droite quelconque passant par M_2 a pour transversale réciproque une droite qui fournit le point M, quand on lui applique le théorème de McKenzie.

En résumé : 1° toute droite remarquable située dans le plan d'un triangle donne, par application des idées que nous venons d'exposer dans ce paragraphe, naissance à un point remarquable du cercle circonscrit; 2° tout point remarquable situé sur le cercle circonscrit peut être déterminé : par la considération du point inverse, et, en appliquant le théorème de McKenzie à la transversale réciproque d'une droite quelconque passant par ce point.

35. Les associations irrationnelles. — Nous n'avons pas, dans les considérations diverses que nous avons développées et que nous allons résumer tout à l'heure, touché à une idée plus délicate mais dont nous devons pourtant dire un mot, au moment de quitter le sujet qui a fait l'objet de cette note.

La transformation à laquelle nous faisons allusion ici est celle dans laquelle on associe, à des nombres donnés, d'autres nombres liés à ceux-ci par des formules renfermant les symboles irrationnels. En suivant le parallélisme des idées exposées dans les paragraphes précédents on voit que la difficulté que nous soulevons maintenant est celle qui correspond, notamment, à l'opération arithmétique de la racine carrée. Nous avons associé jusqu'ici, à des éléments donnés, ceux qui en dérivent par les procédés de l'addition ou de la soustraction, de la multiplication ou de la division; pourquoi,

obéissant une pente naturelle, ne pas considérer aussi les éléments A′, B′, C′ associés aux quantités A, B, C au moyen des formules

$$\frac{A'}{\pm\sqrt{A}}=\frac{B'}{\pm\sqrt{B}}=\frac{C'}{\pm\sqrt{C}}.$$

Cette idée s'ajoute, bien naturellement, à celles que nous avons exposées jusqu'ici et complète le parallèle que nous avons poursuivi entre les opérations élémentaires de l'arithmétique et les associations correspondantes dans la géométrie du triangle; mais cette association nouvelle que nous imaginons ici n'est plus *uniforme* comme celles que nous avons envisagées précédemment; elle est *complexe*, si nous voulons exprimer par là qu'à un point donné correspondent plusieurs points; il est vrai que, dans l'exemple qui nous occupe, ils sont algébriquement adjoints.

Quoi qu'il en soit, voici comment on peut déterminer les points (A′, B′, C′) qui correspondent au point donné (A, B, C).

Nous ferons d'abord une remarque. *Soient quatre points en ligne droite* A, B, C, D *et tels que l'on ait*

$$\overline{AC}^2=AB.AD\,; \qquad (1)$$

on a aussi

$$\left(\frac{BC}{CD}\right)^2=\frac{AB}{AD}, \qquad (2)$$

et réciproquement.

En effet, l'égalité (2) peut s'écrire

$$(AC-AB)^2AD=(AD-AC)^2AB,$$

ou

$$\overline{AC}^2.AD+\overline{AB}^2.AD=\overline{AD}^2.AB+\overline{AC}^2.AB,$$

ou encore

$$\overline{AC}^2(AD-AB)=AD.AB(AD-AB)\,;$$

c'est-à-dire

$$\overline{AC}^2=AD.AB.$$

La réciproque est manifestement vraie, puisque l'on peut remonter de la dernière égalité à la première. Au fond, et sous une forme un peu plus simple, cette remarque se confond avec celle que nous avons faite précédemment (§ 16, p. 201).

Cela posé, prenons un point M (A, B, C) dans l'intérieur

du triangle de référence, de telle sorte que les coordonnées A, B, C de ce point soient positives, et soit μ la droite harmoniquement associée, laquelle coupe les côtés du triangle de référence en trois points P, Q, R. Le point P étant situé sur le côté BC de ce triangle il existe, entre B et C, un point P′ tel que

$$\overline{PP'}^2 = PB.PC,$$

et il n'en existe qu'un seul.

On obtient ainsi, sur les côtés de ABC trois points P′,Q′,R′ et, d'après la remarque faite tout à l'heure, nous avons

$$\left(\frac{P'B}{P'C}\right)^2 = \frac{PB}{PC}.$$

En appliquant cette observation aux trois points P′,Q′,R′, on voit que les trois droites AP′, AQ′, AR′ concourent en un certain point M′. Il reste à déterminer les coordonnées de ce point M′.

Or PQR étant la transversale harmoniquement associée au point (A, B, C) on a, en valeur absolue,

$$\frac{PB}{PC} = \frac{C}{B},$$

et, par suite,

$$\frac{P'B}{P'C} = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{B}}.$$

Les coordonnées de M′ sont donc

$$\sqrt{A}, \quad \sqrt{B}, \quad \sqrt{C},$$

les radicaux étant pris avec le signe +; les trois autres points qui correspondent à M, se déduisent d'ailleurs de M′ comme nous l'avons dit plus haut (§ 10), puisqu'ils sont algébriquement adjoints à celui-ci.

36. Le demi-potentiel. — Par exemple, veut-on déterminer le point remarquable ρ qui, dans le triangle ABC, a pour coordonnées

$$\sqrt{a}, \quad \sqrt{b}, \quad \sqrt{c};$$

on opère de la manière suivante. Par les pieds P,Q,R des bissectrices extérieures, on mène au cercle circonscrit des tangentes P*p*, Q*q*, R*r* et l'on rabat P*p* sur PBC en PP′; les droites AP′, BQ′, CR′ concourent au point cherché ρ.

37. Les points supplémentaires. — Depuis que cet article est écrit, j'ai eu connaissance, au congrès de Nancy, des points que M. Neuberg propose d'appeler *points supplémentaires*. Ces points ne sont autre chose que les points complémentaires, lorsqu'on se place dans le système des coordonnées normales.

Si l'on appelle x, y, z les quantités proportionnelles aux distances d'un point M aux côtés du triangle de référence, les coordonnées du point supplémentaire M′ sont proportionnelles à

$$y + z, \quad z + x, \quad x + y.$$

Il y a aussi, naturellement, l'*antisupplémentaire* de M, c'est le point M″ représenté par

$$y + z - x, \quad z + x - y, \quad x + y - z.$$

Un seul terme (que l'on adopte le mot de complémentaire ou celui de supplémentaire) suffirait d'ailleurs pour représenter le point M′; il faudrait seulement expliciter dans le langage le système de coordonnées que l'on emploie. ce qui ne paraît pas offrir d'inconvénient. Dans tous les cas, et nous avons déjà insisté sur ce point, que la distinction soit faite par le mot qu'a proposé M. Neuberg, ou par la déclaration du système de coordonnées que l'on emploie, elle est absolument nécessaire.

38. Résumé. — Nous pouvons maintenant résumer les idées générales que nous venons d'exposer.

Prenons un tableau formé par les trois lettres

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \qquad (1)$$

et supposons qu'elles représentent, dans un système bien défini, dans le système barycentrique par exemple, les coordonnées d'un point M. A toute opération algébrique effectuée avec les nombres (1) correspondent de nouveaux nombres et ceux-ci peuvent encore représenter les coordonnées d'un certain point M′. De cette observation, toute évidente, découle cette conséquence qu'à un point remarquable d'un triangle on peut associer indéfiniment d'autres points remarquables.

C'est alors, en se plaçant au point de vue général que nous venons de définir, qu'on doit se demander quelles sont les

opérations arithmétiques les plus simples que l'on puisse effectuer sur trois nombres donnés. Il est, en effet, naturel de penser que de semblables opérations doivent conduire à la détermination de points qui *dérivent* d'un point donné par des lois géométriques, lesquelles bénéficiant nécessairement de la simplicité apportée aux transformations algébriques auxquelles nous faisons allusion, déterminent, dans le plan du triangle de référence, la situation du point M', associé au point M.

Or, du tableau (1), on peut déduire les suivants :

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A},\ -\mathbf{B},\ +\mathbf{C}, \\ \mathbf{A},\ +\mathbf{B},\ -\mathbf{C}, \\ \mathbf{A},\ -\mathbf{B},\ -\mathbf{C}. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$\mathbf{B}+\mathbf{C},\quad \mathbf{C}+\mathbf{A},\quad \mathbf{A}+\mathbf{B}. \qquad (3)$$

$$\mathbf{B}+\mathbf{C}-\mathbf{A},\quad \mathbf{C}+\mathbf{A}-\mathbf{B},\quad \mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{C}. \qquad (4)$$

$$\mathbf{B}-\mathbf{C}\qquad \mathbf{C}-\mathbf{A}\qquad \mathbf{A}-\mathbf{B} \qquad (5)$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{A} \\ \mathbf{C},\ \mathbf{A},\ \mathbf{B} \end{array} \quad (6) \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} \mathbf{A},\ \mathbf{C},\ \mathbf{B} \\ \mathbf{B},\ \mathbf{A},\ \mathbf{C} \\ \mathbf{C},\ \mathbf{B},\ \mathbf{A} \end{array} \quad (6')$$

ou,

$$\left.\begin{array}{lll} \mathbf{BC}, & \mathbf{CA}, & \mathbf{AB} \\ \frac{1}{\mathbf{A}}, & \frac{1}{\mathbf{B}}, & \frac{1}{\mathbf{C}} \end{array}\right\} \qquad (7)$$

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{1}{\mathbf{B}}, & \frac{1}{\mathbf{C}}, & \frac{1}{\mathbf{A}} \\ \frac{1}{\mathbf{C}}, & \frac{1}{\mathbf{A}}, & \frac{1}{\mathbf{B}} \end{array}\right\} \qquad (8)$$

$$\mathbf{A}^p,\quad \mathbf{B}^p,\quad \mathbf{C}^p \qquad (9)$$

$$\pm\sqrt{\mathbf{A}},\quad \pm\sqrt{\mathbf{B}},\quad \pm\sqrt{\mathbf{C}} \qquad (10)$$

Dans ce tableau se trouvent résumés, les opérations algébriques simples que l'on peut effectuer avec trois nombres donnés; et, en acceptant la terminologie adoptée dans ce travail, on voit que ces opérations diverses conduisent aux points que nous proposons de nommer :

(2) **Points algébriquement adjoints.**

(3) **Point complémentaire.**

(4) **Point anti-complémentaire.**

(5) **Point associé à l'infini.**

(6) et (6') **Points isobariques (de première et de seconde espèce)** (*).

(7) **Point réciproque (sens ordinaire).**

(8) **Points Brocardiens.**

(9) **Points potentiels de l'ordre** p.

(10) **Points irrationnellement associés.**

Il nous resterait à montrer comment on peut se servir des idées diverses que nous avons exposées dans cette note pour mettre en lumière certaines propriétés de la géométrie du triangle. Mais outre que nous avons eu occasion, dans le courant de ce travail, d'indiquer, çà et là, quelques applications des idées générales qu'il comporte, nous ne pourrions entrer plus profondément dans la sphère de ces applications sans dépasser, d'une façon trop marquée, le caractère élémentaire de cette note.

Voici, pour terminer, quelques identités qui pourront être utiles à ceux qui cultivent cette géométrie du triangle, si particulièrement intéressante par la simplicité, l'élégance et la richesse des propositions qu'elle renferme.

39. Les identités dans la géométrie du triangle. — Le tableau suivant, qui peut être indéfiniment poursuivi, fait connaître quelques identités qu'on rencontre assez souvent dans dans la géométrie du triangle et qui démontrent, suivant les cas, ou que trois points sont en ligne droite, ou que trois droites concourent.

$$\Sigma (B - C) \equiv 0$$
$$\Sigma A(B - C) \equiv 0$$
$$\Sigma (B + C)(B - C) \equiv 0$$
$$\Sigma (B + C - A)(B - C) \equiv 0$$
$$\Sigma (A^2 - BC)(B + C) \equiv 0$$
$$\Sigma (B - C)(A^2 - AB - AC - 2BC) \equiv 0$$

(*) M. Neuberg, observant que les coordonnées du point **(A, C, B)** peuvent être considérées comme proportionnelles à $\left(\frac{A}{BC}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}\right)$ propose, pour ce motif, de nommer les points isobariques de deuxième espèce *points semi-réciproques*.

$$\Sigma \left\{ (B - C)^2 - 2(A - C)(A - B) \right\} \equiv 0$$
$$\Sigma A(AB + AC - B^2 - C^2) \equiv 0$$
$$\Sigma \frac{A - B}{C} + \Sigma \frac{A - C}{B} \equiv 0$$
$$\Sigma (B - C)(AB + AC - B^2 - C^2) \equiv 0$$
$$\Sigma (A^2 - BC)^3(B^3 - C^3) \equiv 0$$
$$\Sigma A(B - C)(B + C - A)^2 \equiv 0$$
$$\Sigma A(B + C)(B^2 - C^2)(A^2 - BC) \equiv 0$$
$$(B - C)(C - A)(A - B) + \Sigma A^2 (B - C) \equiv 0$$
$$\Sigma A^2(B - C)(B + C - A)(B^2 + C^2 - AB - AC) \equiv 0$$
$$\Sigma (B - C)^3(B + C - A)(B^2 + C^2 - AB - AC) \equiv 0$$
$$\Sigma A(B - C)(A^2 - BC)(B^2 + C^2 - BC) \equiv 0$$
$$\Sigma A(B - C)(A^2 - AB - AC - 2BC)(B^2 + C^2 - AB - AC) \equiv 0$$
$$\Sigma A(B - C)(B^2 + C^2 - A^2)(B + C - A) \equiv 0$$
$$(A + B + C)^2(A - B)(B - C)(C - A) + \Sigma (A^2 + BC)^2(B - C) \equiv 0$$
$$\Sigma (B - C)(3A^2 - B^2 - C^2 - 2AB - 2AC + 2BC)^2 \equiv 0$$

. . . .

Certaines de ces identités sont évidentes ou faciles à vérifier ; plusieurs autres sont un peu plus difficiles à reconnaître et leur vérification constitue alors un exercice de calcul algébrique (*).

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur aux Collège de Vire.

(*Suite*, voir p. 252.)

---

23. — Lemme. Si sur les côtés d'un angle α, on porte à partir du sommet deux longueurs a et b et que, sur ces longueurs comme diamètre, on décrive des circonférences, la portion de tangente commune extérieure l, comprise entre les

---

(*) On trouvera dans le numéro de décembre du *Journal de Mathématiques spéciales* un très intéressant article de M. Neuberg, *sur la transformation de coordonnées dans la géométrie du triangle.* Cet article que nous avons demandé à l'inépuisable obligeance de notre collègue Belge, complète, par un côté, la présente note.

points de contact, est donnée par la formule

$$l = ab \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

24. — Si, sur les côtés d'un triangle comme diamètres, on décrit des circonférences et que l'on désigne par l_a, l_b, l_c les portions de tangente commune extérieure à ces circonférences combinées deux à deux, comprises entre les points de contact, on a

$$l_a\ l_b\ l_c = Sr.$$

25. — Si, sur les deux segments adjacents à l'angle A et déterminés sur les côtés c et b du triangle ABC par les bissectrices intérieures des angles C et B, on décrit des circonférences, et que θ_a désigne la longueur de la portion de tangente commune extérieure comprise entre les points de contact; θ_b θ_c ayant même signification pour les segments correspondants aux angles B et C, on à la relation

$$\theta_a\ \theta_b\ \theta_c = \frac{r.\ a.\ b.\ c.\ S}{(a+b)\ (a+c)\ (b+c)}.$$

26. — Si, sur les côtés d'un angle égal à l'angle A d'un triangle ABC, on porte des longueurs égales aux segments déterminés par les bissectrices extérieures des angles B et C du triangle en question, segments adjacents à l'angle A, et que l'on décrive des demi-cercles sur ces longueurs; si θ'_a désigne la portion de tangente commune extérieure comprise entre ces points de contacts, et que θ'_b, θ'_c désignent des longueurs analogues pour les angles B et C, on a

$$\theta'_a\ \theta'_b\ \theta'_c = \frac{abc}{(a-b)\ (a-c)\ (b-c)} Sr.$$

27. — L_a, L , L_c désignant des quantités analogues aux précédentes pour les segments déterminés par les hauteurs, on a :

$$L_a\ L_b\ L_c = Sr \cos A \cos B \cos C.$$

On trouve aisément

$$L_a = bc \cos^2 A \sin^2 \frac{A}{2}$$

et des formules analogues pour L_b, L_c; d'où, par multiplication

$$L_a\, L_b\, L_c = abc \cos A \cos B \cos C \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$$
$$= (p-a)(p-b)(p-c) \cos B \cos B \cos C = Sr \cos A \cos B \cos C.$$

28. — Pour les segments déterminés par les points de contact du cercle inscrit avec les côtés K_a, K_b, K_c, ayant une signification analogue aux précédentes, on a

$$K_a K_b K_c = \frac{S^2 r^2}{abc} = \frac{Sr^2}{4R}.$$

On a, effectivement

$$K_a = (p-a)\sin\frac{A}{2}, \quad K_b = (p-b)\sin\frac{B}{2}, \quad K_c = (p-c)\sin\frac{C}{2}$$

d'où
$$K_a K_b K_c = (p-a)(p-b)(p-c) \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$$
$$= Sr \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} = \frac{S^2 r^2}{abc} = \frac{Sr^2}{4R}.$$

29. — Pour les segments déterminés par les points de contact des cercles ex-inscrits avec les côtés eux-mêmes, on aura

$$\lambda_a \lambda_b \lambda_c = \frac{S^2 r^2}{abc} = K_a K_b K_c.$$

On trouve aisément, en effet

$$\lambda_a^2 = (p-b)(p-c)\sin^2\frac{A}{2}$$
$$\lambda_b^2 = (p-a)(p-c)\sin^2\frac{B}{2}$$
$$\lambda_c^2 = (p-a)(p-b)\sin^2\frac{C}{2}$$

d'où
$$\lambda_a \lambda_b \lambda_c = (p-a)(p-b)(p-c) \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} = \frac{S^2 r^2}{abc} = K_a K_b K_c.$$

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Balitrand, *élève de mathématiques spéciales au Lycée de Nîmes.*

... Permettez moi aussi de vous signaler une construction (*) relative au nombre π qui me paraît assez simple. Elle est tirée du *Manuel d'applications mathématiques* de M. Terquem (page 273.) et je la reproduis textuellement.

(*) Comparer avec celle qui a été donnée; Journal, 1886, p. 137.

« On a fait plusieurs tentatives pour trouver par des opérations graphiques plus ou moins simples; c'est-à-dire avec la règle et le compas, le rapport approché du diamètre à la circonférence, pour les cas où l'on n'a pas besoin d'une grande précision. Voici une construction assez simple et qui donne un résultat exact jusqu'aux dix-millièmes, et qui ne commence par conséquent à différer que dans les cent-millièmes.

Soit AOB le diamètre du cercle dont on cherche le rapport avec la circonférence, on trouvera que AD (que nous allons déterminer) est égal à la demi-circonférence: ou 2AD égal à la circonférence entière, exactement jusqu'à la cinquième décimale près c'est-à-dire à $\frac{6}{100.000}$, en opérant comme suit :

Soit menée au point B la tangente indéfinie et soit OR, le rayon perpendiculaire au diamètre AOB;

Soit porté le rayon, comme corde, de R en S, on aura l'arc RS $= 60^\circ$ et SB $= 30^\circ$.

Du centre O, par le point S, soit menée la sécante OST. On aura TB $=$ tg. 30°. Partant du joint T, portez trois fois (*) le rayon le long de la tangente de T en D, point qui est ainsi déterminé. Enfin menez DA : c'est la ligne sensiblement égale à la 1/2 circonférence. Car soit le rayon OB $= 1{,}00000$ on aura AD $= 3{,}14153$ qui ne diffère que de $0{,}00006$ de $3{,}14159$ qui présente les cinq premiers chiffres décimaux du rapport de M. de Lagny. On calcule aisément AD, car cette ligne est l'hypothénuse du triangle rectangle ABD, dans lequel AB $= 2{,}00000$ BD $= 3{,}00000 -$ tg $30^\circ = 2{,}42265$; or

$$AD = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2} = 3{,}14153.$$

L'approximation ainsi obtenue est très suffisante, car l'erreur de ce résultat ne s'élèverait qu'à une ligne pour un cercle qui aurait 231 pieds de diamètre. »

M. Lemoine, dans une lettre qu'il nous adresse, nous fait observer que la question 181, dont une solution a paru dans

(*) il est sous-entendu ici que c'est dans la direction TB.

le dernier numéro, a été traitée par lui (*Journal*, 1885, p. 52) parmi les exercices qui font l'objet de l'article cité.

La question eût été retirée si je m'étais aperçu de ce double emploi.

Elle a d'ailleurs été proposée par le Rev. T. C. Simmons dans l'*Educational Times* (n° 7957) et on trouve sa solution dans le *Mathematical questions and solutions* (1885, p. 80).

On la rencontre encore dans le *Sinopsis of elementary results*, etc., p. 75; on trouvera dans le numéro de décembre du *Journal de M. S.* des renseignements sur ce dernier ouvrage.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

PARIS 1886

22 juillet. — I. Un rectangle dont le périmètre est donné, et égal à $2p$, tourne autour d'un de ses côtés. Trouver quelles doivent être ses dimensions et autour de quel côté il doit tourner pour que le volume engendré soit maximum.

Rép. $a = \frac{p}{3}$ $b = \frac{2p}{3}$, volume maximum $\frac{4\pi p^3}{27}$.

II. Démontrer que si trois nombres entiers forment une progression arithmétique de raison r et si l'un d'eux est un multiple de r le produit de ces trois nombres est divisible par $6r^3$.

23 juillet. — I. Soient deux points A et A′ sur un rayon d'une circonférence C de centre O, de rayon R, et posons OA $= a$, OA′ $= a'$; quelle relation doit-il y avoir entre a et a' pour que le rapport $\frac{Ma}{Ma'}$ des distances d'un point quelconque M de la circonférence aux points A et A′ soit constant? On calculera à cet effet $\frac{MA^2}{MA'^2}$ en fonction du cosinus de l'angle θ que fait OM avec OA et on cherchera la condition pour que ce rapport soit indépendant de cosinus θ.

Rép. $$\frac{R^2 + a^2}{R^2 + a'^2} = \frac{a}{a'}.$$

II. Étant donné un plan incliné de hauteur AB $= h$ et faisant un angle α avec le plan horizontal, on abandonne en A un point matériel sans vitesse initiale, au bout de combien de temps arrivera-t-il en C? On distingue par g l'accélération de la pesanteur.

Rép. $$t = \frac{1}{\sin \alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

24 juillet. — I. Démontrer que dans la parabole la sous-normale est constante et égale au paramètre.

II. Déterminer les valeurs des arcs x et y qui vérifient les deux équations: $\sin x + \sin y = 1$; $\cos 2x + \cos 2y = 1 - a^2$, dans lesquelles a représente un nombre donné. On calculera $\sin x$ et $\sin y$.

Rép. $\sin x = \frac{1+a}{2}$, $\sin y = \frac{1-a}{2}$.

26 juillet. — I. Démontrer que les forces appliquées à un corps peuvent toutes se ramener à deux.

II. Résoudre l'équation $2 \cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$; il faudra (*) d'abord montrer qu'on peut la transformer en deux autres $\cos 2x = 0$ et $\cos x + \cos 3x = 0$.

Rép. $x = K\pi \pm \frac{\pi}{4}$; $x = K\pi$.

27 juillet. — I. Couper une sphère donnée par un plan de manière que le rapport du plus grand segment sphérique déterminé ainsi, au cône qui a pour sommet le centre de la sphère, et pour base la section, soit égal à m.

Rép. $m < 1$, une seule solution $x = \frac{R}{2}\left[1 + \sqrt{\frac{m-9}{m-1}}\right]$,

$9 > m > 1$, pas de solution;

$m > 9$, deux solutions $x = \frac{R}{2}\left[1 \pm \sqrt{\frac{m-9}{m-1}}\right]$.

II. Deux trièdres qui ont les trois faces égales ont les dièdres égaux.

28 juillet. — I. Calculer la hauteur abaissée du sommet A d'un triangle sur le côté opposé: connaissant l'angle A et les deux segments déterminés par la hauteur sur les côtés opposés. — On donne $ABD = m$, $DC = n$, et on demande de calculer $AD = x$.

II. Un projectile est lancé de bas en haut verticalement avec une vitesse de 20^m par seconde, quelle sera sa vitesse quand il sera parvenu à une hauteur de 15^m ?

29 juillet. — I. Étant donné un cercle et une corde AB, calculer le côté du carré DEHK inscrit dans l'un des segments déterminés par la corde.

II. Fraction ordinaire génératrice de la fraction décimale suivante: 0,5382482482 4... Indiquer les raisonnements par lesquels on la détermine.

(*) Il était au moins aussi simple, croyons-nous, voulant diriger le candidat vers une décomposition de l'équation, d'observer que celle-ci peut s'écrire

$$2 \cos x + 2 \cos 4x \cos x = 0,$$

ce qui conduit à une décomposition un peu plus rapide que celle que l'on avait indiquée: $\cos x = 0$, $\cos 4x + 1 = 0$, etc. La réponse est immédiatement donnée par les formules

$$x = K\pi, \quad \text{et} \quad x = K\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4};$$

formules qui sont d'ailleurs conformes à celles qui sont écrites plus haut.

BIBLIOGRAPHIE

Nous sommes heureux d'annoncer à nos lecteurs l'apparition de la *deuxième édition de l'Arithmétique, de l'Algèbre et de la Géométrie du cours de mathématiques élémentaires de M. Combette* (F. Alcan, éditeur).

Ces ouvrages ont été, il y a seulement quatre ans, analysés dans ce journal. Tout le bien qu'on a dit d'eux était mérité et, en supposant la chose nécessaire, se trouve justifié par le succès que nous constatons aujourd'hui.

La nouvelle édition du Cours d'Algèbre a reçu quelques améliorations qu'il est utile de mentionner.

1° La méthode de résolution en nombres entiers de l'équation du premier degré à deux inconnues a été changée : ce problème est résolu en appliquant une forme remarquable du plus grand commun diviseur à deux nombres ($\Delta = A\alpha + B\beta$).

2° L'auteur a changé les méthodes qui conduisent à la condition nécessaire et suffisante pour que deux équations du deuxième degré aient une racine commune, et a donné les diverses formes de cette condition qu'il importe de connaître pour plusieurs questions d'algèbre.

3° La résolution des équations irrationnelles du deuxième degré a été traitée plus complètement.

4° Un chapitre nouveau a été consacré à la résolution de deux inégalités simultanées, dont une au moins est du deuxième degré.

5° La discussion des fonctions a été complétée par une théorie élémentaire des dérivées et de leurs applications : le tracé des branches infinies dans les courbes figuratives a été précisé par la recherche des asymptotes, déduite d'une transformation simple de la fonction explicite.

6° La méthode dite des substitutions qui souvent simplifie tant la discussion des problèmes, a été appliquée à des exemples remarquables.

7° La discussion générale du quotient de deux trinômes du second degré a été ajoutée, ainsi que les formes principales de la courbe figurative.

8° Les exercices ou problèmes, dont le nombre s'est trouvé sensiblement augmenté par les questions proposées dans les diverses académies aux baccalauréats ès sciences, ont été reportés à la fin du cours et classés méthodiquement.

On trouve enfin dans la nouvelle édition du Cours de Géométrie quelques modifications dans l'ordre des applications de l'homothétie et de la mesure des volumes où l'auteur a placé le théorème général permettant de cuber le solide limité par deux polygones à plans parallèles, et par les triangles qui ont pour bases et pour sommets les côtés et les sommets de ces polygones.

Les énoncés des problèmes donnés aux examens récents ont été ajoutés parmi les nombreux exercices déjà proposés.

G. L.

QUESTION 183

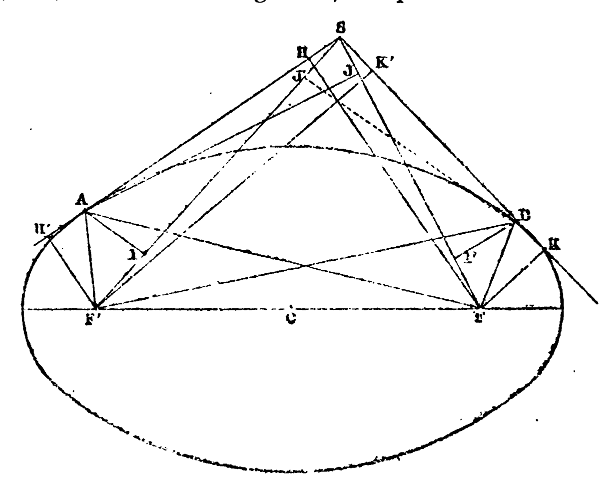
Solution par M. Henri MARTIN, élève au Lycée Condorcet.

Par un point S *on mène deux tangentes* SA, SB *à une ellipse de foyers* F *et* F'. *Démontrer les relations :*

$$\frac{\overline{SF}^2}{\overline{SF'}^2}=\frac{FA\times FB}{F'A\times F'B};\qquad \frac{\overline{SA}^2}{\overline{SB}^2}=\frac{AF\times AF'}{BF\times BF'}.$$

(E. Vigarié.)

Des points F et F' abaissons des perpendiculaires FH, F'H', FK, F'K' sur les tangentes ; des points A et B abaissons



aussi des perpendiculaires AI, BI', AJ, BJ', sur les droites SF'. SF. Les triangles rectangles AFH et BFK, respectivement semblables aux triangles AF'H' et BF'K' donnent :

$$\frac{AF}{AF'}=\frac{FH}{F'H'}.\frac{FB}{F'B}=\frac{FK}{F'K'}\qquad \frac{FA.FB}{F'A.F'B}=\frac{FH}{F'H'}\times\frac{FK}{F'K'}.$$

Mais les triangles SFK et SFH respectivement semblables aux triangles SF'H' et SF'K' donnent aussi

$$\frac{FH}{F'H'}=\frac{FK}{F'K'}=\frac{SF}{SF'}.$$

Donc

$$\frac{\overline{SF}^2}{\overline{SF'}^2} = \frac{FA.FB}{F'A.F'B}.$$

Les triangles rectangles SAI et SAJ respectivement semblables aux triangles SBI′ et SBJ′ donnent

$$\frac{SA}{SB} = \frac{AI}{BI'} = \frac{AJ}{BJ'}, \qquad \frac{\overline{SA}^2}{\overline{SB}^2} = \frac{AI}{BJ'} \times \frac{AJ}{BI'}.$$

Or les triangles rectangles AF′I et AFJ sont respectivement semblables aux triangles BF′J′ et BFI′, puisque les droites SF′ et SF sont bissectrices des angles AF′B et AFB.

On a donc

$$\frac{AF'}{BF'} = \frac{AI}{BJ'} \qquad \frac{AF}{BF} = \frac{AJ}{BI'} \cdot \frac{\overline{SA}^2}{\overline{SB}^2} = \frac{FA \times F'A}{FB \times F'B}.$$

C. Q. F. D.

Note. — On obtient une solution un peu plus simple en procédant ainsi : prenons sur F′B le symétrique f de F par rapport à SB et un point A_1 tel que $F'A_1 = F'A$. Si on remarque que $SA_1 = SA$ et que dans le triangle F′Sf les droites SA_1, SB sont des droites inverses, en appliquant à ces droites les formules connues (v. *Journ. Élém.* 1885, p. 56) on trouvera immédiatement les formules qu'il fallait démontrer.

E. V.

Nota. — M. C. Gralleau, maître auxiliaire au lycée de Marseille a aussi résolu cette question.

QUESTIONS PROPOSÉES

236. — Démontrer la formule

$$\text{arc cos}\,\frac{a^2 - b^2 + (a^2 + b^2)\cos x}{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos x} = 2\,\text{arc tg}\left(\frac{b}{a}\,\text{tg}\,\frac{x}{2}\right).$$

(Boutin.)

237. — Dans le triangle ABC on on mène les droites AD, BE, CF, qui se coupent au même point G, et rencontrent les côtés opposés aux points D, E, F. On propose de dé-

montrer que

$$\frac{AG}{GD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}.$$

(G. Russo.)

238. — A l'intérieur d'une demi-circonférence de diamètre AB, on décrit deux autres demi-circonférences O et O′ tangentes en A et en B à la première ; puis, on mène l'axe radical des circonférences O et O′. Démontrer que les deux cercles tangents à la circonférence AB, à l'axe radical et à chacune des circonférences O et O′ sont égaux.

(Bordage.)

239. Résoudre les équations:

$$x(y + z + yz) = a,$$
$$y(z + x + xz) = b,$$
$$z(x + y + xy) = c.$$

(Ignacio Beyens.)

NOTA. — Cette question, sous une forme différente, est proposée dans le numéro d'octobre dernier de l'*Educational Times;* c'est à cette publication que nous l'avons empruntée. G. L.

Une solution de la question n° 7 paraîtra prochainement. Toutes les questions proposées dans les années 1882 et 1883 se trouvent ainsi résolues.

Voici les numéros des questions proposées en 1884 et qui n'ont pas encore reçu de solution : 128, 131, 132, 134, 142, 145, 147, 148, 149, 150, 158, 159, 160 et 161.

ERRATUM. — Dans l'énoncé de la question 230, il faut entendre que les points en question sont algébriquement adjoints *dans le triangle anti-complémentaire.*

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 24516-6.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Pages.

Arithmétique et Algèbre.

Géométrie, Trigonométrie et Mécanique.

Bibliographie.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 24516-6.